MEMÓRIAS
DA
ACADEMIA DAS CIÊNCIAS
DE
LISBOA

CLASSE DE CIÊNCIAS

TOMO XLVII

Volume 2

JOSÉ FRANCISCO RODRIGUES
O *Ensaio* de 1939 de António Monteiro,
o seu contexto e a sua importância

ANTÓNIO ANICETO RIBEIRO MONTEIRO
Ensaio sobre os Fundamentos da Análise Geral

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS
DE LISBOA

LISBOA • 2020

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto «UIDB/04561/2020» do Centro de Matemática, Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

CMAFcIO
CIÊNCIAS - ULISBOA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

O *Ensaio* de 1939 de António Monteiro, o seu contexto e a sua importância

José Francisco Rodrigues[1]

O inédito e ignorado "Ensaio sobre os FUNDAMENTOS da ANÁLISE GERAL" de 1939, prémio Artur Malheiros de 1938 atribuído pela Academia das Ciências de Lisboa a António Aniceto Ribeiro Monteiro, é uma monografia que introduz o modernismo matemático e prepara uma viragem na investigação matemática em Portugal, antecedendo a criação do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, em 1940, apoiado pelo Instituto para a Alta Cultura.

Regressado de Paris, onde se doutorara em 1936 com Maurice Fréchet (1878-1973), Monteiro faz uma extraordinária e original síntese, em quatro capítulos abstratos, que vai da *Teoria dos Conjuntos* à *Análise Geral*, passando pela *Álgebra Moderna* e pela *Topologia Geral*, e estabelece, em bases firmes, a via da investigação do movimento matemático português no início da década de quarenta do século XX. Nesta comunicação, motivada pela reorganização dos arquivos da Academia em fins de 2015, apresentamos uma introdução e uma análise preliminar deste importante *Ensaio*, agora publicado em *fac-símile*, das suas fontes e da sua influência que se pode identificar nos posteriores trabalhos de Monteiro e dos seus discípulos.

ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO (1907-1980) – *MATEMÁTICO MODERNISTA, FUNDADOR E PROFESSOR*

Em 2007, no centenário de António Monteiro, a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) prestou-lhe uma justíssima homenagem, publicando uma notável fotobiografia [AAM_Fb2007] e organizando um Colóquio Internacional na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), do qual resultou um número especial do seu Boletim [AAM_Bc2007].

Fig. 1. Capas do livro fotobiográfico [AAM_Fb2007] e do Boletim especial [AAM_Bc2007]

[1] ACL, Faculdade de Ciências/ULisboa.

No ano seguinte, foi publicada uma extensa compilação das suas *Obras*, em oito volumes com cerca de 2800 páginas, onde não foi possível incluir o seu *Ensaio* de 1939, pois na altura não era conhecida nenhuma cópia. Na apresentação das *Obras* [AAM_O2008], Jean-Pierre Kahane, da Academia das Ciências de Paris, iniciou o seu significativo elogio escrevendo:

> *The works of António A. Monteiro belong to the world history of mathematics. They cover a large variety of topics from classical analysis to topology and from advanced algebra to logic in its more modern chapters. Some of them come from courses and synthetic presentations, but the majority of them are research papers. They are presented in different styles, occasionally handwritten, and also in different languages. Despite their intrinsic value, these works are a testimony of an age and of an exceptional life. They were written, in four different countries: France, Portugal, Brazil and Argentina. Monteiro was the founder of mathematical journals and various mathematical institutions, first in Portugal, then in Latin America. He had to emigrate from Portugal because of Salazar's regime and was also affected by the military dictatorship in Argentina. His life testifies the link between the struggle for science and the struggle for freedom.*

Nascido em Moçâmedes (Angola) a 31 de maio de 1907, filho de um oficial do exército colonial português, de quem fica orfão em 1915, vem para Lisboa frequentar o Colégio Militar entre 1917 e 1925, ano em que se inscreve na Faculdade de Ciências de Lisboa nos cursos preparatórios para uma carreira militar. Aluno de Pedro José da Cunha (1867-1945) em *Cálculo Diferencial, Integral e das Variações*, ainda antes da sua licenciatura em 1930 na Universidade de Lisboa, já em Ciências Matemáticas, revelou as suas tendências e aptidões para a investigação, tendo obtido no ano seguinte uma bolsa da Junta de Educação Nacional (JEN) para estudar em Paris onde apresentou a sua tese de doutoramento em junho de 1936, sob a orientação de Maurice Fréchet (1878-1973).

Nos primeiros quatro anos da sua estada de cinco anos letivos em Paris (1931-36), Monteiro, ultrapassou as deficiências da sua preparação em Portugal, frequentando vários cursos das "*principais teorias da especialidade que modernamente se têm criado e desenvolvido*", de G. Julia, A. Denjoy, E. Goursat, P. Montel e M. Fréchet, mas só em 1934 e em 1935, já sob a orientação deste último professor, é que publica os seus primeiros resultados de investigação em duas notas nos *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, os quais irão determinar a sua tese de 1936 *Sur l'additivité des noyaux de Fredholm*, na Universidade de Paris. Conforme revela a sua correspondência e os seus relatórios de bolseiro da JEN em Paris, naturalmente influenciado pelo seminário de J. Hadamard no *Collège de France* e pela frequência dos cursos e da biblioteca no *Institut Henri Poincaré*, Monteiro assume a sua missão de "*também estudar em Paris a organização dum Centro de Estudos Matemáticos que teria, entre outros, o objectivo de realizar o ressurgimento completo das tradições matemáticas portuguesas*", chegando mesmo a referir a aquisição de livros para o "*Instituto de Matemática*", revelando a sua preocupação e empenho nessa missão [AF, p.109].

O seu regresso a Portugal é marcado pelo início da guerra civil em Espanha e pela publicação, a 14 de setembro de 1936, do Decreto-lei n.º 27003, que obrigava os funcionários públicos e, por extensão os bolseiros do Instituto para a Alta Cultura (IAC), que havia substituido a JEN no novo Ministério da Educação Nacional, a assinar a declaração salazarista de compromisso político: *"Declaro, por minha honra que estou integrado na ordem social estabelecida pela Constituição política de 1933, com activo repúdio do comunismo e de todas as idéas subversivas"*. Com a sua corajosa e honrosa recusa em assinar essa declaração, decorrente da sua rigorosa coerência intelectual que, durante toda a sua vida e apesar de não se lhe serem conhecidas filiações partidárias, o faria afirmar-se como anti-fascista convicto [JR2], Monteiro, teria dito:

"*não aceito limitações à minha inteligência*". Fica assim impossibilitado de prosseguir em Portugal a carreira universitária que irá desenvolver no seu exílio, em 1945 no Brasil, e na Argentina, de dezembro de 1949 até à sua jubilação e afastamento, também por razões políticas, da Universidad Nacional del Sur a 31 de março de 1975, onde era *Profesor Emérito* desde 1972 [AAM_Fb2007].

Apesar das dificuldades económicas de ter de viver de explicações em Lisboa, com o espírito de missão e com a capacidade de iniciativa que lhe eram patentes, a fortíssima influência e a determinante atividade de Monteiro ficaram indeléveis na breve década do *Movimento Matemático Português* (1936-46), iniciada com as atividades do *Núcleo de Matemática, Física e Química*, em finais de 1936, com a fundação da revista científica *Portugaliae Mathematica* em 1937, com o início do *Seminário de Análise Geral* em 1939, a criação em 1940 do *Centro de Estudos de Matemática de Lisboa*, pelo IAC e anexo à FCUL sob a presidência de Pedro José da Cunha e sob a direção científica de Monteiro, e também com a fundação da *Gazeta de Matemática* e da SPM, a 12 de dezembro de 1940.

Entre junho de 1937 e dezembro de 1942, a atividade científica e académica de Monteiro em Lisboa é efetuada na qualidade de tarefeiro do IAC como inventariador de bibliotecas científicas em Portugal, sendo autor de um trabalho pioneiro cujo relatório foi publicado em 1939 pelo IAC [IP], na altura presidido por A. Celestino da Costa [AAM_O2008]. A notável atividade científica e de orientação de jovens matemáticos nos três anos iniciais da atividade do *Centro de Estudos de Matemática de Lisboa*, foi marcada pela influência das ideias modernistas do *Ensaio* de um tarefeiro/inventariador do IAC, culminando com a visita de Maurice Fréchet, no início de 1942, e com a sucessiva partida dos jovens bolseiros para o estrangeiro, incluindo os dois primeiros discípulos portugueses de Monteiro, Hugo Ribeiro para a ETH de Zurique e de José Sebastião e Silva para a Universidade de Roma.

Iniciou, ainda em 1941, a sua colaboração com a Faculdade de Ciências do Porto com uma conferência de *Introdução à Topologia Geral,* seguido de um curso no outono do ano seguinte sobre *Introdução à Noção de Função Contínua,* já no âmbito do *Centro de Estudos de Matemática do Porto,* criado em 1942. Para aí transferiu-se em finais de 1943 e iniciou Alfredo Pereira Gomes, o seu terceiro discípulo em Portugal, na Análise Geral, tendo dirigido o *Seminário de Topologia Geral* durante o ano seguinte até à sua partida com a família para o Rio de Janeiro, em fevereiro de 1945. A sua estada no Porto foi subsidiada pela *Junta*

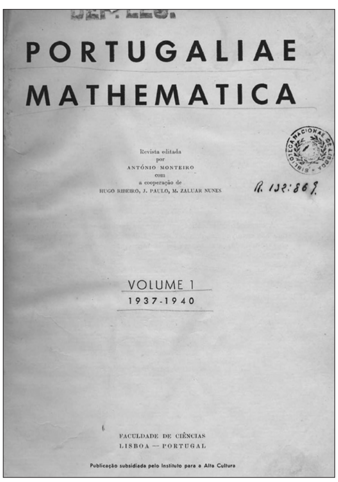


Fig. 2. Frontespíscio do vol. 1 da Portugaliae Mathematica. **Fig. 3.** M. Fréchet, P. J. da Cunha e A. Monteiro na Faculdade de Ciências de Lisboa no início de 1942 (Fonte [AAM_Fb2007]).

de Investigação Matemática (JIM), criada em 4 de outubro de 1943, conjuntamente com Ruy Luis Gomes e Aureliano Mira Fernandes, uma notável associação patrocinada por fundos privados, que, reunindo a quase totalidade dos (poucos) investigadores portugueses no país, tinha como objetivo primeiro "*promover o desenvolvimento da investigação matemática*" e teve um papel muito importante no financiamento das publicações científicas, em particular à *Portugaliae Mathematica* depois do IAC deixar de lhe dar o apoio inicial que se limitou aos três primeiros volumes [RLG].

Entre 1945 e 1948, Monteiro foi professor de Análise Superior na Universidade do Brasil, hoje Universidade Federal do Rio de Janeiro, onde lecionou Topologia Geral, Análise Funcional e Conjuntos Ordenados, Reticulados e Álgebras de Boole. Aí teve forte influência em jovens como Maurício Peixoto, que foi seu co-autor, Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, cuja tese de 1949 resolveu uma questão colocada pelo mestre, e ainda em Leopoldo Nachbin [LN], a quem emprestou os dois primeiros volumes de *Topologie Générale* de Bourbaki [BII-III] e que lhe sucedeu na direção da série brasileira de monografias *Notas de Matemática.* Esta notável série, que Monteiro havia fundado em 1948 e que se publicou no Rio de Janeiro até 1972, foi prosseguida, a partir do volume 48, pela *North-Holland Publishing Company* e atingiu em 2008, já na *Elsevier*, o número 208 da coleção. Ainda no Rio de Janeiro, foi membro fundador do *Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas* em 1949, tendo partido no fim desse ano para a Argentina, por a Embaixada de Portugal no Rio de Janeiro ter convencido o Reitor da Universidade do Brasil a não lhe renovar o contrato devido às suas intervenções cívicas contra o regime português.

Nomeado Professor da Universidad Nacional de Cuyo, San Juan, Argentina, em 1950, Monteiro funda aí a *Revista Matemática Cuyana,* com M. Cotlar e E. Zarantonello em 1955. É daí que envia o interessante artigo *Problemas da cultura matemática portuguesa* [AAM_O2008], publicado em 1954 na revista *Ciência*, da Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa, onde conclui "*que o problema principal do momento consiste na criação de um INSTITUTO PORTUGUÊS DE MATEMÁTICA que se dedique fundamentalmente à realização de trabalhos de investigação matemática e ao ensino da investigação matemática*". Apesar de ter sido convidado para a Universidade de Buenos Aires, Monteiro, com alguns dos seus novos discípulos argentinos, muda-se em 1957 para a recém criada *Universidad Nacional del Sur*, em Bahía Blanca, onde funda o Instituto e a Biblioteca de Matemática, prosseguindo a sua investigação que, entretanto, se tinha centrado na Lógica Algébrica e em Estruturas Algébricas Ordenadas (Reticulados). Aí inicia uma profunda renovação da Licenciatura em Matemática com impacto em toda a Argentina [EO], cria uma nova série de *Monografias de Matemática* e funda as *Notas de Lógica Matemática*, em 1964, e as *Notas de Álgebra e Análisis* (1966). Em 1974 é nomeado membro honorário da *Unión Matemática Argentina*.

Apesar de ter passado um ano sabático na Europa, entre setembro de 1969 e agosto de 1970, visitando colegas em várias universidades em França, Roménia, Bélgica, Itália e Inglaterra, só regressa a Lisboa em março de 1977, como Bolseiro do Instituto Nacional de Investigação Científica, onde retoma a sua investigação no Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais (C.M.A.F.) durante cerca de dois anos. Aí orienta o doutoramento de M. Isabel Loureiro, o seu quarto discípulo português, e elabora o extenso trabalho *Sur les Algèbres de Heyting Symétriques*, que em 1979 obtém o Prémio Gulbenkian de Ciência e Tecnologia, referido a 1978. Esta memória foi publicada no volume 39 de *Portugaliae Mathematica* [AAM_PM1980], o qual lhe foi dedicado postumamente. Numa carta de 5 de junho de 1978 enviada a Alfredo Pereira Gomes, o seu antigo discípulo do Porto, então professor da FCUL e diretor da *Portugaliae Mathematica,* na altura em recuperação pela SPM com o apoio do C.M.A.F., apesar do seu estado de saúde, Monteiro escreveu "*Estou realmente satisfeito com os resultados da minha actividade científica em Portugal. Isto deve-se sobretudo ao Centro de Matemática (C.M.A.F.), que me proporcionou o tempo livre para estudar.*" [APG].

De regresso a Bahía Blanca, Monteiro faleceu em 29 de outubro de 1980, no país do seu segundo exílio onde se radicara com a família e onde deixou uma influência intelectual marcante. Nas palavras do matemático argentino Eduardo Ortiz, Monteiro pertence "*to an old tradition of Argentinian progressive and independent thought to which the country owes some of its most valuable achievement*". Numa das últimas cartas, escreveu-lhe: "*asi es la vida caro Ortiz. Uno se usa y se gasta en tareas que no pueden terminarse: y a pesar de eso se inician con entusiasmo y dedicación, porque las esperanzas y certezas nunca se pierden. Tristezas de Bahia Blanca! nas margenes del Napostá; entre vientos y tormentas en que la tierra nos ahoga, veo Lisboa distante – recuerdos de mi infancia!*" [EO].

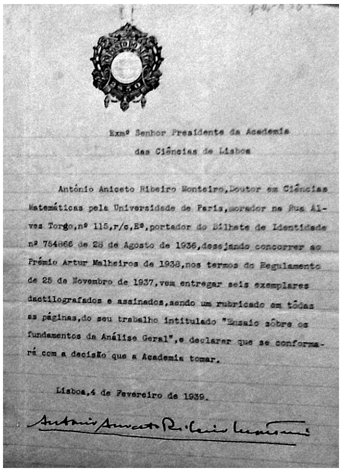
O PRÉMIO ARTUR MALHEIROS DE 1938

Em 1937 foi instituído na Academia das Ciências de Lisboa, um prémio científico anual no valor de 5000 escudos, destinado a estimular o progresso das ciências em Portugal e atribuível, por concurso, "*a autor português de obra original e inédita sobre o ramo de conhecimentos científicos*" que fosse indicado no edital de abertura. As áreas do conhecimento eram sete e abrangiam, em regra pela ordem seguinte: as ciências matemáticas, as ciências físicas e químicas, as ciências naturais, as ciências médicas, as ciências aplicadas, as ciências jurídicas, políticas e sociais e, concluindo, as ciências económicas e financeiras.

A abertura da primeira edição do *Prémio Artur Malheiros,* de 1938, é anunciada oficialmente a 5 de fevereiro de 1938 no Diário do Governo, "*pelo prazo de trezentos e sessenta e cinco dias*", solicitando que os candidatos entregassem "*até às dezasseis horas do dia em que terminar o prazo do concurso, seis exemplares dactilografados do seu trabalho, assinados e um dêles rubricados em tôdas as folhas, acompanhados de requerimento de admissão, dirigido ao presidente da Academia*".

O *Ensaio,* dedicado à memória de seu pai, é submetido por António Monteiro no último dia do prazo, a 4 de fevereiro de 1939, na sequência da sua participação no *Núcleo de Matemática, Física e Química de Lisboa* havia mais de dois anos. Um mês depois, o Secretário Geral da Academia comunica-o aos quatro membros da Secção de Matemática, juntamente com um outro trabalho a concurso, da autoria de Jayme Araújo, sobre "*Algumas Modalidades teórico-práticas na Resolução e discussão do problema de Pothenot*", uma questão clássica de topografia plana, também conhecido como problema de Snellius-Pothenot, cuja primeira solução data do século XVII e consiste em determinar a posição de um ponto acessível desconhecido a partir de medições angulares a três outros pontos conhecidos.

Em cerca três meses, o júri examinou os trabalhos e deliberou o vencedor do prémio e, posteriormente, na sessão da Classe de Ciências de 6 de julho de 1939, foi aprovado, por unanimidade, o parecer e a atribuição do primeiro *Prémio Artur Malheiros – 1938* ao *Ensaio* de António Monteiro. O prémio só lhe foi entregue na Sessão da Classe de Ciências a 16 de novembro de 1939, após lhe ter sido comunicado oficialmente por carta de 4 de novembro pela Secretaria da Academia. Entretanto, é de registar a publicação a 1 de julho de 1939, no jornal *O Diabo* [AAM_O2008], de um desenho de Monteiro por Manuel Mendes, artista plástico, escritor e resistente anti-fascista, ligado ao grupo da Seara Nova, com uma nota de M. Zaluar Nunes celebrando o prémio da Academia das Ciências.



Exmº Senhor Presidente da Academia
das Ciências de Lisboa

António Aniceto Ribeiro Monteiro, Doutor em Ciências Matemáticas pela Universidade de Paris, morador na Rua Alves Torgo, nº 115, r/c, Eº, portador do Bilhete de Identidade nº 754866 de 28 de Agosto de 1936, desejando concorrer ao Prémio Artur Malheiros de 1938, nos termos do Regulamento de 25 de Novembro de 1937, vem entregar seis exemplares dactilografados e assinados, sendo um rubricado em tôdas as páginas, do seu trabalho intitulado "Ensaio sôbre os fundamentos da Análise Geral", e declarar que se conformará com a decisão que a Academia tomar.

Lisboa, 4 de Fevereiro de 1939.

António Aniceto Ribeiro Monteiro

Fig. 4. Requerimento assinado por A. Monteiro em papel selado.(Fonte ACL). **Fig. 5.** A. Monteiro desenhado por Manuel Mendes em 1939 (Fonte [AAM_Fb2007]).

Os dois principais contributos originais de Monteiro, referidos no Prefácio e enunciados no capítulo 4 do seu *Ensaio,* foram reconhecidos pelo parecer de 14 de junho de 1939, redigido por Aureliano Mira Fernandes. O relatório é também assinado pelos três outros matemáticos da Secção de Matemática da Academia, sendo a primeira assinatura de Pedro José da Cunha, enquanto presidente da Secção, e as outras de Santos Lucas e Manuel Peres.

O relatório/parecer é uma carta dirigida ao Presidente da Classe de Ciências da Academia que resumidamente expõe o que de essencial Mira Fernandes encontrara no *Ensaio,* por um lado, reconhecendo o seu valor e a sua atualidade e, por outro, revelando que o relator estava muito razoavelmente a par dos progressos recentes da matemática, apesar da pobreza da bibliotecas científicas em Portugal na época. No entanto, elabora numa pequena confusão histórica quando refere no início do relatório que "*O nome de Análise Geral foi criado pelo professor Fréchet*", apesar de Monteiro ter escrito, logo na primeira linha do Prefácio do *Ensaio* e com mais rigor, que a *Análise Geral* fora fundada no princípio do século XX por Maurice Fréchet. De facto, Fréchet adotou mas não criou a expressão, hoje caída em desuso, de *Análise Geral*, pois ela aparece, pela primeira vez, nas lições do matemático norte-americano E. H. Moore sobre *Introduction to a form of General Analysis,* efetuadas na Universidade de Yale em setembro de 1906, as quais são citadas no livro de Fréchet de 1928 [F]. Contudo, Mira Fernandes reconhece que a Análise Geral *"é uma ciência de criação recente cujos progessos podem justificar àmanhã uma acertada mudança de nome"*, algo que efetivamente veio a acontecer.

Efetivamente, Maurice Fréchet foi pioneiro ao propor, na sua tese de 1906 sob orientação de Jacques Hadamard (1865-1963), uma abordagem abstrata da Análise Matemática baseada em estruturas gerais: *classe (L)*, espaços com convergência; *classe (E)*, espaços com *écart*, i.e. com distância, renomeados espaços métricos por F. Hausdorff, em 1914, como uma subclasse de espaços topológicos, e *classe (V),* uma generalização dos espaços *(E)* munidos de vizinhanças (*voisinages*). Estas noções foram evoluindo e Fréchet expôs os seus resultados no influente livro *Les Espaces Abstraits* [F], o qual marcou fortemente a atividade matemática inicial de Monteiro e, em particular, o seu *Ensaio*.

O testemunho auto-biográfico do matemático norte-americano Norbert Wiener (1894-1964), que interagiu diretamente com Fréchet na sua segunda viagem à Europa, por ocasião do Congresso

Internacional de Matemáticos realizado em Estrasburgo em 1920, é eloquente: "*The scholar I chose was Maurice Fréchet. It was Fréchet more than anyone else who had seen what was implied in the new mathematics of curves rather than points (…) One of the specific things which attracted me in Fréchet was that the spirit of his work [spirit of abstract formalism] was very closely akin to the work I had tried to do at Colombia on topology (…) My training with Russell and my later contact with the work of Whitehead had sensitized me to to the use of formal logic tools in mathematics, and there was much in Fréchet's work which was suited from the very beginning to be embodied in the peculiar and highly original mathematical-logical language which Whitehead and Russell had devised for the Principia Mathematica.*" [NW].

O *Ensaio* de 1939 reflete claramente o "*espírito de formalismo abstrato*", que Monteiro absorveu de Fréchet e aí antecipou a Bourbaki, tendo ficado inédito e perdido no arquivo da Academia das Ciências de Lisboa. Por isso, não foi possível integrá-lo na publicação da sua obra (quase) completa em 2008 [AAM2008] e apenas, na sequência duma organização daquele arquivo se encontrou, em finais de 2015, o seu processo e quatro dos seis exemplares do *Ensaio*.

O ENSAIO SOBRE OS FUNDAMENTOS DA ANÁLISE GERAL DE 1939

Na frase inicial do Prefácio, Monteiro não podia ser mais claro: "*A Análise Geral foi fundada no princípio deste século por Maurice Fréchet, com o objectivo de generalizar o cálculo diferencial e integral para as funções em que a variável independente – e eventualmente a própria função – são elementos de natureza qualquer*"; a qual, citando uma frase de 1933 numa *Notice sur les travaux scientifiques* do seu professor, visa "*o estudo das correspondências entre variáveis de natureza qualquer*" (sublinhado no original).

Monteiro descreve de seguida o conteúdo do seu *Ensaio* que, com cerca de 130 páginas datilografadas, consiste em quatro capítulos: *A Teoria dos Conjuntos Abstractos* (13 p.); *Álgebra Abstracta* (52 p.); *Topologia Abstracta* (26 p.) e *Análise Abstracta ou Análise Geral* (38 p.). Completa o relativamente longo Prefácio, de nove páginas, com um parágrafo programático, que vai pôr em prática de imediato, com o *Curso de Introdução à Análise Geral*, do segundo semestre do ano académico de 1938-39, ainda no âmbito do *Núcleo de Matemática, Física e Química de Lisboa*, e no terceiro ano do *Seminário de Análise Geral*, em abril de 1940, já no âmbito do recém criado Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, a funcionar na Faculdade de Ciências sob a presidência de Pedro José da Cunha. Nesse parágrafo final escreve: "*Se*

Fig. 6. Anúncios do curso de 1939 e do seminário de 1940, já no âmbito do Centro de Estudos de Matemática, de A. Monteiro na Faculdade de Ciências de Lisboa (Fonte [AAM_Fb2007]).

com a realização dêste trabalho conseguirmos chamar à atenção dos jóvens estudiosos do nosso país para a importância sempre crescente da Análise Geral, fundada por M. Fréchet, cujos métodos tendem a dominar a estruturação da matemátca moderna, podemos considerar o nosso objectivo atingido porque pensamos que nestas condições servimos a ciência de uma maneira geral e os estudiosos portuguêses em particular. Por essa razão apresentamos êste trabalho à Academia das Ciências de Lisboa para o concurso ao Prémio Científico Artur Malheiros de 1938."

Considerando, como Fréchet, a Teoria dos Conjuntos Abstratos como um capítulo da Análise Geral, Monteiro carateriza-a como sendo a teoria que "*se ocupa das propriedades dos conjuntos de pontos que se mantêm invariantes em relação ao grupo das transformações biunívocas*", tal como a Álgebra Abstrata, "*um dos capítulos mais recentes da matemática moderna*" trata das propriedades "*que se mantém invariantes em relação ao grupo dos isomorfismos (correspondências biunívocas que respeitam a operação considerada)*" e a Topologia, também ela um capítulo da Análise Geral, é a teoria "*que estuda as propriedades dos conjuntos de pontos que se mantêm invariantes em relação ao grupo das transformações bicontínuas ou homeomorfias*."

Finalmente no quarto e principal capítulo, Monteiro introduz "*a noção de espaço algébrico-topológico – que podemos definir como um espaço onde existe simultâneamente uma álgebra e uma topologia*", com o objetivo de tratar do "*estudo das propriedades invariantes para um topo-isomorfismo, isto é, por uma correspondência biunívoca que é simultâneamente uma homomorfia e um isomorfismo*", em especial no que designa por *espaços analíticos,* ou seja aqueles para os quais a operação algébrica seja contínua. Entre estes, introduz os *grupos abelianos topológicos perfeitamente decomponíveis*, para os quais demonstra "*um teorema de estrutura*", que sendo "*análogo aos teoremas de Banach e de Cantor-Bernstein*" (sobre a equivalência de dois conjuntos com a mesma potência), estabelece, em particular, que se dois daqueles grupos "*têm a mesma dimens*ão algébr*ica êles são topo-isomorfos*". A nova noção de *dimensão algébrica* é uma generalização da "*dimensão linear de um espaço (vetorial) de tipo (F) introduzida recentemente por Banach*" no seu livro clássico de 1932, sobre *Théorie des opérations linéaires*. Culminando uma moderna síntese de algumas estruturas algébrico-topológicas, incluindo grupos topológicos e espaços (B) de Banach, é levado a definir anéis vetoriais normados, noção também considerada em 1936 pelo matemático japonês M. Nagumo, com o objetivo de generalizar os resultados da sua tese sobre a aditividade dos núcleos de Fredholm, obtendo condições necessárias e suficientes para a aditividade das resolventes no âmbito dos anéis de operadores lineares em espaços de Banach.

A clareza com que as novas ideias abstratas são descritas e concretizadas por Monteiro no seu *Ensaio* são notáveis e representam um progresso significativo, certamente, independente e desconhecido do coletivo dos matemáticos que, sob o nome de N. Bourbaki, estavam a criar os Éléments de Mathématique que só se começariam a publicar um ano mais tarde em Paris. Na sua autobiografia, André Weyl (1906-1998), um dos fundadores e mais influentes matemáticos desse coletivo, regista o espírito da época ao escrever [AW2, p.114]: "*In establishing the tasks to be undertaken by Bourbaki, significant progress was made with the adoption of the notion of structure, and of the related notion of isomorphism. Retrospectively these two concepts seem ordinary and rather short on mathematical content, unless the notions of morphism and category are added. At the time of our early work these notions cast new light upon subjects which were still shrouded in confusion: even the meaning of the term "isomorphism" varied from one theory to another. That there were simple structures of group, of topological space, etc., and then also more complex structures, from rings to fields, had not to my knowledge been said by anyone before Bourbaki, and it was something that needed to be said.*" Que era relevante dizê-lo, Monteiro também o sabia e descreveu-o claramente não só no Prefácio do seu *Ensaio* como também ao longo dos seus quatro capítulos.

No primeiro capítulo, sobre "A TEORIA DOS CONJUNTOS ABSTRACTOS", Monteiro começa por introduzir a relação dos "*elementos abstractos ou indefinidos*" pertencerem ou não ao conjunto, usando a notação de Peano, hoje banal, e com a noção de igualdade, com a possibilidade de num mesmo conjunto poderem existir várias relações de igualdade, caso em que uma delas, a fundamental em relação às outras, é a "*identidade e a outra ou as outras têm o nome de equivalências*", caraterizadas pelas propriedades de reflexividade, de simetria e de transitividade. Após descrever a inclusão de conjuntos, a noção de função, de homomorfismo em relação à identidade e de transformações biunívocas, conclui que "*as propriedades de que se ocupa a teoria dos conjuntos abstractos, isto é aquelas que se mantêm invariantes para uma equivalência, são aquelas que se podem enunciar recorrendo apenas às noções primitivas da teoria dos conjuntos $x = y$ e $x \in A$ e às funções proposicionais da Lógica formal*." O capítulo prossegue com uma descrição da potência de um conjunto infinito ou número cardinal enunciando o Teorema de Cantor-Berstein sobre dois conjuntos serem equivalentes se e só se têm a mesma potência, deixando a demonstração para o segundo capítulo, para onde também remete o estudo da álgebra dos subconjuntos de um dado conjunto. Termina com algumas propriedades sobre os números cardinais, referindo a equivalência entre o problema da tricotomia (<, >,=) e do axioma de Zermelo que enuncia da seguinte forma: "*Se os elementos de um conjunto A são conjuntos E, não vazios e sem elementos comuns dois a dois, então existe pelo menos um conjunto A' que contém um elemento e um só de cada conjunto E.*"

O segundo capítulo, o mais longo do *Ensaio*, é a primeira exposição moderna em português sobre "ÁLGEBRA ABSTRACTA", "*um dos capítulos mais recentes da Matemática Moderna, visto que o início do seu desenvolvimento se pode localizar por volta de 1920*" (p.14). Depois de introduzir uma operação algébrica num conjunto abstrato e a noção de espaço algébrico, define homomorfismo entre dois espaços algébricos, que é isomorfismo se for biunívoca, quando essa correspondência respeita as respetivas operações, e estabelece o objectivo da álgebra abstracta como aquela "*que estuda as propriedades dos espaços algébricos que se mantêm invariantes quando se passa de um espaço algébrico para outro que lhe seja isomorfo*" e que se ocupa das propriedades "*que se podem enumerar recorrendo apenas às noções primitivas da Álgebra*". Depois

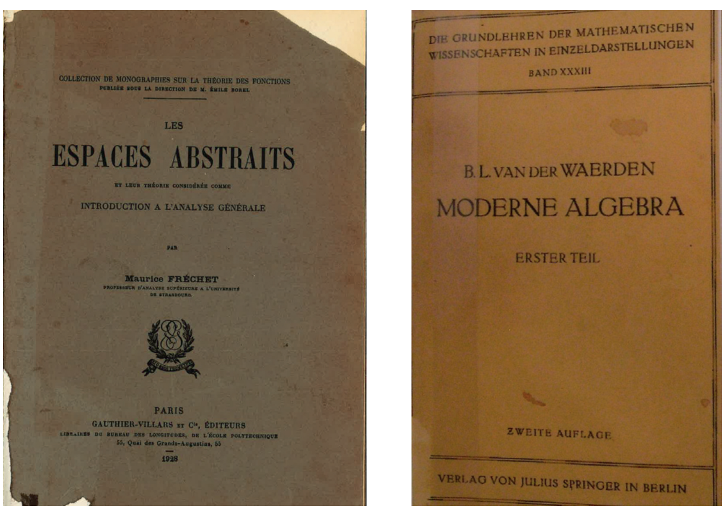


Fig. 7. As capas dos livros de M. Fréchet e do de B.L. van der Waerden (Fonte Biblioteca da FCUL).

de introduzir os axiomas da adição e da multiplicação, trata da álgebra dos conjuntos abstractos, onde à adição corresponde a união de conjuntos e à multiplicação a intersecção, e demonstra um teorema de Banach de 1924 sobre a possibilidade da decomposição de dois conjuntos em duas partes disjuntas que são respetivamente equivalentes, ou isomorfas. Deste conclui o teorema de Schröder-Cantor-Berstein: "*se o conjunto A é equivalente a um sub-conjunto de B e se B é equivalente a um sub-conjunto de A, os conjuntos A e B são equivalentes*". Em seguida define as noções de Grupo, de Grupo Abeliano, de "*Espaço Vectorial Abstracto*", de Anel, onde estuda transformações e as suas propriedades, e de "*Anel Vectorial*", tendo em vista o anel dos operadores lineares definidos num espaço vetorial, terminando o capítulo com o "*Tipo algébrico de um espaço*", a noção "*que desempenha em Álgebra Abstracta o mesmo papel que a noção de potência de um conjunto desempenha na teoria dos conjuntos abstractos".*

No Capítulo III, dedicado à "TOPOLOGIA ABSTRACTA", Monteiro coloca-se na perspetiva de Fréchet [F] utilizando como noção primitiva a noção de vizinhança que lhe "*parece a mais intuitiva muito embora existam noções da topologia que não se sabem aínda exprimir por intermédio da noção de vizinhanç*a", centrando esse capítulo na estrutura de *Espaço (V)*. Apesar de iniciar o capítulo com uma breve referência aos espaços topológicos baseados na operação de derivação de conjuntos, i.e. a passagem ao conjunto de pontos limites ou de acumulação de um dado conjunto, Monteiro distancia-se de Pedro José da Cunha, o seu mentor em Lisboa [PJC], e demarca-se de alguma terminologia de Mira Fernandes [AMF], dois dos primeiros introdutores em Portugal destas noções que não faziam ainda parte dos cursos da época. É interessante ler na página 67, como Monteiro refere que "*a topologia pode ser baseada sobre outras noções primitivas, por exemplo: vizinhança, conjunto fechado, conjunto aberto, "fermeture" (ou conjunto de inclusão, na terminologia do Prof. Mira Fernandes) ponto interior, etc.",* sem contudo citar o artigo de divulgação [AMF], resultado de uma conferência realizada por aquele professor do I.S.T. no dia 26 de novembro de 1934 na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e que certamente conhecia, apesar de não ter assistido à conferência por se encontrar em Paris. Na exposição das 26 páginas do capítulo III da sua monografia, Monteiro faz um interessante resumo e uma original síntese da *Topologia Abstracta*, onde, sendo patente a influência estruturalista na Matemática absorvida na sua estada em Paris, não deixa de seguir a terminologia e a abordagem de Fréchet (*Espaços (V)* e *(L)*, funções contínuas, espaços distanciados), apesar de procurar integrar alguns dos desenvolvimentos da década posterior ao livro [F] de 1928.

Finalmente, no quarto capítulo, Monteiro apresenta a *ANÁLISE ABSTRACTA,* designação por si proposta, ou *ANÁLISE GERAL*, como uma síntese das "*mais recentes da matemática moderna, visto que ela se pode considerar ainda em plena formação*", apresentando-se "*como lògicamente subordinada à Álgebra Abstracta e à Topologia Abstracta e portanto à teoria dos Conjuntos Abstractos*". Assim, entre os espaços algébrico-topológicos, i.e. aqueles que forem simultaneamente dotados de uma "álgebra" (uma ou mais operações algébricas) e de uma topologia que estejam relacionadas entre si, ou seja, onde as operações algébricas forem contínuas, chama "espaços analíticos". Nestes podem ser definidas propriedades importantes, como, por exemplo, limites de somas ou de produtos de sucessões num grupo topológico, ou de séries absolutamente convergentes e de derivadas em grupos abelianos normados e completos. Introduzindo os espaços de Banach [B], Monteiro apresenta o teorema deste matemático polaco sobre os operadores lineares serem contínuos se e só se forem limitados. Mas o culminar deste capítulo está na generalização a anéis vetoriais abstratos, normados e com unidade, onde é possível estabelecer uma teoria abstrata da resolvente e onde estabelece condições necessárias e suficientes sobre a aditividade das resolventes de operadores lineares, que havia obtido no verão de 1936 e que generalizam resultados da sua tese sobre a aditividade das resolventes de dois núcleos de Fredholm [AAM]. Este resultado novo é reconhecido por Mira Fernandes no seu relatório à Academia, que contudo dá mais relevo à observação de Monteiro na última página do *Ensaio* sobre a equivalência de dois conjuntos arbitrários implicar a equivalência dos conjuntos de todos os seus subconjuntos, determinando então a existência de um *"topo-isomorfismo"* entre estes, pois isso "*inculca, sobretudo, a função primacial da Análise Abstracta dentro da Análise Geral de Fréchet*".

De facto, Monteiro deu mais importância àquela generalização do último capítulo do *Ensaio*, que publicou posteriormente em 1940 numa pequena nota de quatro páginas sobre *Sur l'additivité dans un anneau*, nas páginas 289-292 do volume 1 da *Portugaliae Mathematica* [AAM_O2008]. Numa nota da página 291 deste artigo, Monteiro refere o seu *Ensaio* e regista a sua intenção de o publicar naquela revista. Nesse artigo não apresenta demonstrações, tal como não o fizera no *Ensaio*, pois refere que são análogas às da sua tese de 1936 [AAM]. É interessante observar que a sua tese foi composta na Imprensa Portuguesa do Porto, tendo sido também publicada nos *Anais da Faculdade de Ciências do Porto* no volume desse ano, cuja *Introduction* termina na página 8 com o agradecimento: "*Nous remercions également la* Junta de Educação Nacional *<u>et le peuple de notre pays</u>, à qui nous devons d'avoir pu entreprendre et terminer ce travail sans préocupations matérielles, pendant notre long séjour à Paris*", cuja expressão sublinhada por nós é omitida na edição de [AAM] publicada em 1937 na *Portugaliae Mathematica* e reproduzida nas suas *Obras* [AAM_O2008].

AS FONTES, A ÉPOCA E BOURBAKI (1935-1942)

Se a influência de Fréchet, em particular do livro [F] referido na Bibliografia do *Ensaio*, é indelével, na teoria de conjuntos Monteiro sofre a influência da escola polaca, citando o livro de Sierspinski, também publicado em Paris em 1928 e na álgebra da escola alemã, através da primeira edição do influente livro de van der Waerden [vW], desenvolvido a partir das lições de Emil Artin e de Emmy Noether numa linguagem precisa e moderna, cuja segunda edição iria ser traduzida em português na década seguinte por Hugo Ribeiro e publicada pela Sociedade Portuguesa de Matemática.

O livro de Sierspinki, apesar do título se referir aos números transfinitos e constituir uma introdução muito clara à teoria de Cantor e dos seus seguidores, contendo resultados recentes, é também inovador por se basear no método axiomático, que Monteiro segue no seu *Ensaio.*

Contudo na topologia geral, onde as influências polaca e russa também se fazem sentir, Monteiro procura manter-se fiel à terminologia de Fréchet não indo além dos espaços (V), que lhe bastam, apesar de adoptar uma exposição mais abstrata e algo inovadora. No entanto, Monteiro refere as dificuldades do conceito de vizinhança, citando em particular, o curto ensaio de 1938, com apenas 39 páginas, de André Weil [AW1], onde este, para além de estabelecer as propriedades básicas dos espaços uniformes, uma classe de espaços topológicos adaptada aos conceitos de convergência e continuidade uniformes, suscita um conjunto de observações sobre os axiomas da topologia geral onde procura estabelecer uma distinção entre aqueles com mero interesse histórico dos verdadeiramente importantes que irão fixar a exposição moderna do primeiro livro de N. Bourbaki *Topologie Générale*, publicado em Paris em 1940.

Mas é sobretudo no último capítulo sobre análise abstrata que a exposição de Monteiro é original, pois não só efetua uma breve e clara síntese entre a álgebra moderna e a topologia geral, pois, sem esquecer os espaços de Banach [B], desenvolve a teoria dos grupos topológicos e sobretudo introduz, de forma independente do matemático japonês M. Nagumo, os anéis vetoriais topológicos. É importante referir que, já na segunda metade do século XIX, Sophus Lie havia lançado as bases dos grupos de Lie, que são uma classe particular de "grupos contínuos", mas a teoria geral dos grupos topológicos foi iniciada apenas em 1926, por O. Schreier, e que o primeiro livro, da autoria de Lev Pontryagin, sendo de 1938 só iria ser publicado em inglês em 1939 e não era conhecido por Monteiro.

Desde a sua chegada a Paris em 1931, António Monteiro trabalhou na biblioteca do *Institut Henri Poincaré*, recém-criado em 1928, tendo assistido regularmente aos seminários que aí se realizavam. Em particular, o seminário de Gaston Julia, que na década de trinta era frequentado pelos jovens que iriam fundar o grupo Bourbaki, nos três últimos anos académicos da estada de Monteiro em Paris tratou dos seguintes temas: Grupos e Álgebras, em 1933/34; Espaços de Hilbert, em 1934/35; e Topologia em 1935/36. Nos seus relatórios, Monteiro, refere explicitamente as conferências de Claude Chevalley, André Weil, Jean Delsarte e Jean Leray, que no ano académico de 1934/35 também se reuniam periodicamente em Paris no café *Capoulade* em discussões matemáticas. Estas reuniões, que incluíam ainda Jean Dieudonné, Henri Cartan, René de Poussel e Szolem Mandelbrojt, que substituiu Leray, iriam dar lugar à reunião fundadora do pseudónimo coletivo Nicolas Bourbaki, realizada numa aldeia de Auvergne, no centro da França, em julho 1935.

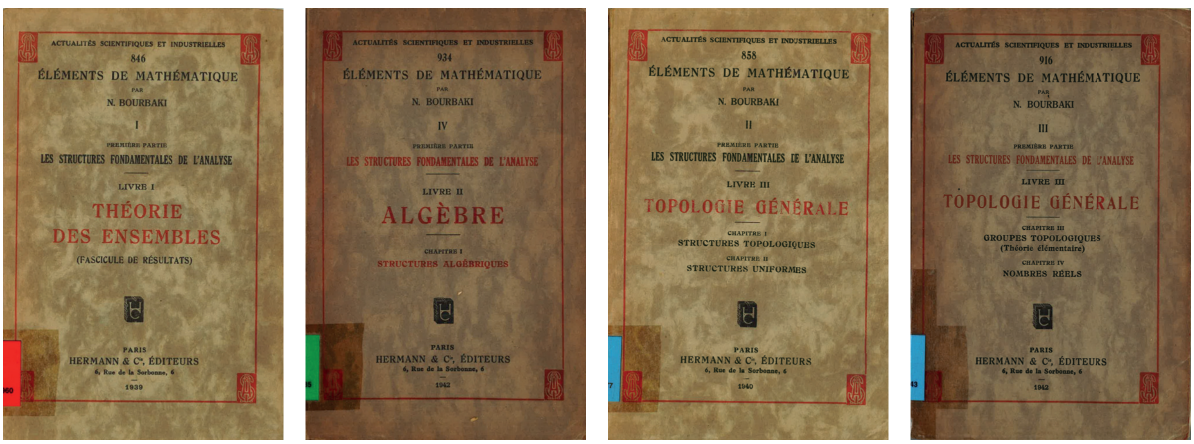


Fig. 8. As capas dos quatro primeiros fascículos de N. Bourbaki (Fonte Biblioteca da FCUL).

Se o objetivo inicial do grupo daqueles jovens professores saídos da *École Normale Supérieur* de Paris era escrever um novo curso de Cálculo Diferencial e Integral, sob a forma de um moderno tratado de Análise Matemática que substituísse os clássicos *Cours d'analyse* da escola francesa, ao longo das várias reuniões e discussões coletivas, o grupo Bourbaki evoluiu para uma apresentação axiomática e abstrata de algumas noções gerais e essenciais, "*les structures fondamentales de l'analyse*", cujos quatro primeiros livros que constituem os *ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE* são [BI,II,III,IV]:

Livre I – *THÉORIE DES ENSEMBLES* (*Fascicule de résultats*) Paris, 1939 (1-2-1940)

Livre II – *ALGÈBRE* (*Structures algèbriques*) Paris, 1942

Livre III – *TOPOLOGIE GÉNERALE* (*Chapitres I et II*) Paris, 1940

Livre III – *TOPOLOGIE GÉNERALE* (*Chapitres III et IV*) Paris, 1942.

O fascículo sobre a Teoria dos Conjuntos, apesar de datado de 1939, tem a data de impressão de 1 de fevereiro de 1940, e começa por explicar o "*mode d'emploi de ce traite*", que "*toma as matemáticas do seu início, dá demonstrações completas e, em princípio, não supõe nenhum conhecimento matemático particular, mas apenas um certo hábito de raciocínio matemático e um certo poder de abstracção*". Contém apenas cerca de 45 páginas de definições e resultados sobre elementos e partes de um conjunto, funções, produtos de vários conjuntos, reunião, intersecção e produto de uma família de conjuntos, relações de equivalência, conjunto quociente, conjuntos ordenados, potências, conjuntos numeráveis e termina com escalas de conjuntos e estruturas, tendo adotado uma notação e uma terminologia consistentes e duráveis.

O segundo livro, sobre Álgebra, é o quarto volume e só é publicado em 1942 na Paris ocupada. Compreende o primeiro capítulo das estruturas algébricas, tratando das leis de composição internas, associatividade, comutatividade, elemento neutro, elementos regulares, elementos simétricos, leis de composição externas, estuturas algébricas, relações entre leis de composição, grupos e grupos de operadores, grupos de transformação, anéis e anéis de operadores, terminando com corpos. A sua introdução abre com a descrição sobre "*fazer álgebra, é essencialmente calcular, isto é, efetuar, sobre os elementos de um conjunto, 'operações algébricas', cujo exemplo mais conhecido é dado pelas 'quatro regras' da aritmética elementar*", e a sua nota histórica, depois de identificar três correntes – a teoria das substituições na resolução das equações algébricas, o cálculo vetorial e matricial e a teoria dos números algébricos – termina na síntese da álgebra moderna como resultado "*sobretudo da obra da escola alemã moderna: começada por Dedekind e Hilbert nos últimos anos do século XIX, o trabalho da axiomatização da Álgebra foi vigorosamente prosseguido por E. Steinitz, e depois, a partir de 1920, sob o impulso de E. Artin, E. Noether e dos algebristas da sua escola (Hasse, Krull, O. Schreier, van der Waerden)*", e reconhece o livro [vW] como fonte de inspiração.

O terceiro livro de Bourbaki, dedicado à Topologia Geral, é, de facto, o segundo a ser publicado em 1940 e compõe-se de dois capítulos que tratam das estruturas de outro tipo que "*dão um sentido matemático às noções intuitivas de limite, de continuidade e de vizinhança*". O primeiro, sobre estruturas topológicas, inicia-se com conjuntos abertos, que determinam a definição de espaço topológico, prosseguindo com vizinhanças e outras noções, como homomorfismos e a continuidade das transformações, produtos, compacidade e espaços conexos, e baseia a noção de convergência no conceito de filtro, uma generalização das sucessões introduzida por H. Cartan em 1937, obtendo a completa equivalência entre vizinhança, conjunto aberto e a topologia da convergência. O segundo capítulo trata das estruturas uniformes, um conceito introduzido por A. Weil em [AW1], que permite estender a estrutura dos espaços métricos introduzidos por Fréchet em 1906, e generalizar para os espaços uniformes importantes resultados, em particular de compacidade e de completação.

Os capítulos III e IV da "Topologia Geral", que também se publicaram num fascículo em 1942, tratam da teoria elementar dos grupos topológicos e dos números reais, respetivamente. O capítulo III, começa pela definição de grupo topológico, enquanto conjunto munido de uma topologia compatível com os axiomas algébricos de grupo, desenvolve a teoria baseada nos filtros e nas suas convergências e nas propriedades das estruturas uniformes, e conclui com alguns tópicos sobre anéis e corpos topológicos. O capítulo IV introduz o grupo $\boldsymbol{R}$ os números reais como o completado do grupo ordenado $\boldsymbol{Q}$, dos números racionais munido da topologia dos intervalos abertos, demonstra as propriedades topológicas usuais de ***R*** e das respetivas séries e funções numéricas, e termina com uma extensa e bastante completa nota histórica com doze páginas.

Comparando a estrutura dos quatro capítulos e das respetivas secções do *Ensaio* de António Monteiro, entregue a 4 de fevereiro de 1939 na Academia das Ciências de Lisboa, com os conteúdos destes quatro primeiros livros de Bourbaki, que são uma obra de outra dimensão e com outra ambição, ficamos surpreendidos pela coincidência do seu encadeamento e mesmo pela sobreposição de muitos dos seus conteúdos. Naturalmente que Monteiro absorveu em Paris, durante a sua estada entre 1931 e 1936, as novas ideias e os resultados mais recentes das matemáticas modernas e que os seus objetivos tinham, numa escala e num contexto completamente diferentes, algum paralelismo com o ambicioso programa do coletivo Bourbaki, mas não podia conhecer nem os planos nem os conteúdos dos *Éléments de Mathématiques*. No entanto, apesar de Monteiro nunca ter sido "bourbakista" nem ter revelado simpatias pelos trabalhos dos discípulos de Bourbaki, ousamos considerar que o seu *Ensaio* é, de facto, uma obra precursora do grande projeto daquele autor coletivo, que também é caraterizada por um modernismo e um estruturalismo notáveis.

A INFLUÊNCIA DO *ENSAIO* NO CEML E NA JIM, ENTRE 1939-1944, E NO BRASIL EM 1945-48

A elaboração do *Ensaio* aparece na sequência dos cursos que Monteiro professou no âmbito do *Núcleo de Física, Matemática e Química* em Lisboa, nomeadamente no iniciado a 2 de março de 1937 no Instituto Superior Técnico sobre *Teoria das Matrizes*, já na perspetiva da Álgebra Moderna, nas duas conferências sobre *Os Fundamentos da Análise Moderna*, realizadas a 20 e 21 de dezembro de 1938, e no *Curso de Introdução à Análise Geral*, iniciado a 27 de fevereiro de 1939 com um programa que cobre exatamente os quatro capítulos do *Ensaio*, estes dois últimos lecionados na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa [AAM_Fb2007].

A 17 de março de 1939, a convite do "Grupo de Estudos dos alunos da Faculdade de Ciências de Coimbra", Monteiro inaugurou as atividades efémeras e sem consequências desse grupo com uma conferência sobre *O objectivo da Análise Moderna,* a qual foi relatada em notícia do *Diário de Coimbra* de 19 de março desse ano da seguinte forma [MCA]: "*Toma, então, a palavra o Dr. Monteiro, que revelando uma cultura matemática invulgar e com raro poder sugestivo e clareza cristalina (...) fala sôbre o objectivo da teoria dos conjuntos, da álgebra abstracta, etc., prendendo sempre o numeroso auditório, em que se viam muitos estudantes e professores, que tributaram ao conferente uma calorosa salva de palmas ao terminar a sua brilhantissima exposição, que durou cêrca de hora e meia*."

O *Seminário de Análise Geral* foi englobado no *Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa* (CEML), que foi criado em 1940 pelo Instituto para a Alta Cultura (IAC), anexo à Faculdade de Ciências de Lisboa, sob a presidência de Pedro José da Cunha, e funcionou durante um período inicial de três anos, sob a direção científica de António Monteiro, tendo trazido a Portugal M. Fréchet, que a 17 de janeiro de 1942 foi recebido como primeiro sócio honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática pelo seu primeiro presidente e secretário-geral, figurando os três na fotografia da Fig. 3 [AAM_Fb2007]. O CEML contribuiu de modo significativo para o arranque da revista e da biblioteca da *Portugaliae Mathematica* e desenvolveu uma atividade pioneira de investigação, com alguns jovens bolseiros, entre os quais Hugo Ribeiro e José

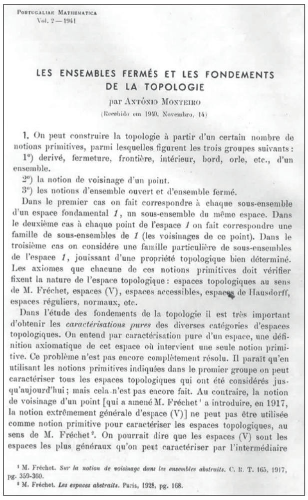
Sebastião e Silva, os principais discípulos de António Monteiro do seu período em Lisboa, criando um movimento intermitente, sem precedentes, de modernização da Matemática em Portugal. Assim, por exemplo, aquele seminário funcionou em abril de 1940 com uma conferência de Hugo Ribeiro sobre *Objectivo da Topologia Geral* e outra sobre *A importância da Análise Geral* por António Monteiro. No entanto, o CEML só retomaria atividades uma década mais tarde, em 1952, sob a direção de José Sebastião e Silva.

A atividade do *Seminário de Análise Geral* foi descrita por Monteiro no seu relatório de fevereiro de 1940: "*O Seminário tem por objetivo fundamental a realização de trabalhos de investigação e para esse efeito existe um plano de estudos. O objetivo fundamental* é estudar os E*spaços Analíticos isto é aqueles em que existe simultaneamente uma Álgebra e uma Topologia. Trata-se de um ramo pouco estudado da Análise Geral. Para esse efeito impõe-se estudar os fundamentos da Álgebra Abstracta e da Topologia e os Espaços Analíticos particulares que têm sido estudados até hoje. Este ano será consagrado fundamentalmente à Topologia, muito embora se realizem outros assuntos ao mesmo tempo. O estudo dos fundamentos da Topologia foi empreendido no princípio deste ano por A. Monteiro e H. Ribeiro, posteriormente ingressaram neste grupo Sebastião e Silva e José Paulo. Os resultados já obtidos excederam toda a expectativa. Há neste momento dois trabalhos publicados na Portugaliae Mathematica: H. Ribeiro* "Sur l'Axiomatique des Espaces Topologiques de M. Fréchet" *e A. Monteiro e H. Ribeiro* "Sur l'axiomatique des Espaces (V)". *Além deste há outros trabalhos realizados este ano no Seminário. Sebastião Silva, que começou a trabalhar há muito pouco tempo, descobriu um princípio de dualidade nas noções da Topologia, destinado a desempenhar, na minha opinião, um grande papel simplificador no estudo da Topologia e a esclarecer as suas noções fundamentais. O mesmo estudioso conseguiu obter já alguns resultados no estudo do problema de Wiener (Topologia).*"

Com a partida dos jovens bolseiros para o estrangeiro e com as dificuldades criadas em Lisboa nos finais de 1942 com o fim da sua bolsa de arquivista do IAC, Monteiro, que ainda em 1941 e 1942 havia começado a colaboração com a Faculdade de Ciências do Porto, desloca a sua atividade para essa cidade em 1943, com o apoio da *Junta de Investigação Matemática* (JIM), começando uma colaboração com Alfredo Pereira Gomes que se torna co-autor duma monografia, com cerca de 150 páginas, sobre *Introdução ao Estudo da Noção de Função Contínua*, publicado em 1944 onde as noções de Topologia e de Análise Geral são desenvolvidas com clareza e profundidade.

A partir de 1945 Monteiro ensina em cursos e seminários tópicos modernos de Análise Superior no Rio de Janeiro, começa a interessar-se e a publicar em estruturas ordenadas e teoria de reticulados e exerce uma influência nos seus novos discípulos brasileiros, entre os quais se destaca Leopoldo Nachbin que publica duas das cinco primeiras *Notas de Matemática,* a coleção fundada em 1948 pelo matemático português no Brasil, nomeadamente o fascículo n.º 1, sobre *Combinação de Topologias* e o n.º 4 sobre *Espaços Vetoriais Topológicos*. O n.º 2 dessa coleção, sobre *Filtros e Ideais,* é do próprio Monteiro e o n.º 5, sobre *Aneis de funções contínuas,* de Marshal H. Stone, sendo todos os cinco sobre temas de *Análise Geral,* na terminologia do *Ensaio* que começava então a cair em desuso.

É notória a influência do conteúdo do *Ensaio* e do seu autor que, com as atividades intensas de investigação matemática de apenas três anos do CEML, em Lisboa, e de cerca de um ano no CEMP, no Porto, juntamente com os seus colaboradores vão constituir um esboço de uma Escola Portuguesa de Topologia Geral, influência essa que se estende ao Rio de Janeiro por cerca de quatro anos. No clássico livro de Topologia Geral de 1955 [K], o matemático norte-americano John L. Kelley, no seu Prefácio, não só faz um agradecimento a Hugo Ribeiro, como cita na Bibliografia três artigos deste e dois de Monteiro, todos


PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 2 — 1941

LES ENSEMBLES FERMÉS ET LES FONDEMENTS DE LA TOPOLOGIE

par ANTÓNIO MONTEIRO

(Recebido em 1940, Novembro, 14)

1. On peut construire la topologie à partir d'un certain nombre de notions primitives, parmi lesquelles figurent les trois groupes suivants:

1°) derivé, fermeture, frontière, intérieur, bord, orle, etc., d'un ensemble.

2°) la notion de voisinage d'un point.

3°) les notions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé.

Dans le premier cas on fait correspondre à chaque sous-ensemble d'un espace fondamental *I*, un sous-ensemble du même espace. Dans le deuxième cas à chaque point de l'espace *I* on fait correspondre une famille de sous-ensembles de *I* (les voisinages de ce point). Dans le troisième cas on considére une famille particulière de sous-ensembles de l'espace *I*, jouissant d'une propriété topologique bien déterminé. Les axiomes que chacune de ces notions primitives doit vérifier fixent la nature de l'espace topologique: espaces topologiques au sens de M. Fréchet, espaces (V), espaces accessibles, espaces de Hausdorff, espaces réguliers, normaux, etc.

Dans l'étude des fondements de la topologie il est très important d'obtenir les *caractérisations pures* des diverses catégories d'espaces topologiques. On entend par caractérisation pure d'un espace, une définition axiomatique de cet espace où intervient une seule notion primitive. Ce problème n'est pas encore complètement résolu. Il paraît qu'en utilisant les notions primitives indiquées dans le premier groupe on peut caractériser tous les espaces topologiques qui ont été considérés jusqu'aujourd'hui; mais cela n'est pas encore fait. Au contraire, la notion de voisinage d'un point [qui a amené M. Fréchet[1] a introduire, en 1917, la notion extrêmement générale d'espace (V)] ne peut pas être utilisée comme notion primitive pour caractériser les espaces topologiques, au sens de M. Fréchet[2]. On pourrait dire que les espaces (V) sont les espaces les plus généraux qu'on peut caractériser par l'intermédiaire

[1] M. Fréchet. *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits.* C. R. T. 165, 1917, pg. 359-360.

[2] M. Fréchet. *Les espaces abstraits.* Paris, 1928, pg. 168.

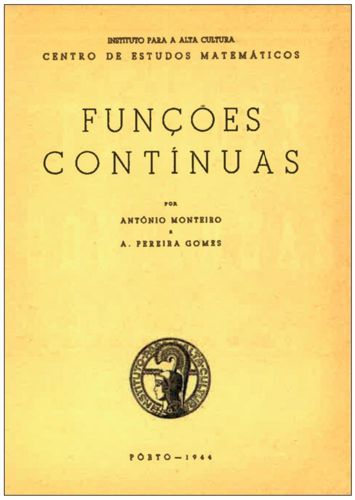


Fig. 9. a) Artigo de Topologia na *Portugaliae Mathematica*, v, 2 (1941), pp. 56-66. b) Frontispício da monografia também publicada nos *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, v. 28, 1944. c) Primeiro volume da coleção NOTAS DE MATEMÁTICA, publicado no Rio de Janeiro em 1948.

publicados na *Portugaliae Mathematica* entre 1940 e 1945, uma nota aos *C.R. Acad. Sc. Paris* de 1948 de A. Pereira Gomes e a monografia n.º 4 das *Notas de Matemática* de L. Nachbin sobre *Espaços Vetoriais Topológicos*, ambos publicados em 1948.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Miguel Telles Antunes o ter proporcionado a redescoberta do Ensaio perdido nos arquivos da Academia, aos colegas Jorge Rezende e Luís Saraiva pelas sugestões e comentários, à Cristina Bernardino e à Anabela Teixeira por me ajudarem a obter referências bibliográficas e ao Professor João Paulo Carvalho Dias por me ter proporcionado em 1978 um encontro único com o Professor António Anieto Monteiro na Biblioteca Geral da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

(COMUNICAÇÃO APRESENTADA À CLASSE DE CIÊNCIAS
NA SESSÃO DE 15 DE FEVEREIRO DE 2018)

REFERÊNCIAS

[AAM_PM1980] *Portugaliae Mathematica*, vol. 39 (1980), Edição da Soc. Port. Mat. dedicada a A.A.Monteiro (jan 1985), sob a direção de Alfredo Pereira Gomes.

[AAM_Bc2007] *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, N.º* Especial, com as Atas do Colóquio de Centenário na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa de junho de 2007, editadas por Luís Saraiva.

[AAM_Fb2007] *António Aniceto Monteiro, uma fotobiografia a várias vozes,* Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa 2007, *Coordenadores:* Jorge Rezende, Luiz Monteiro e Elza Amaral.

[AAM_O2008] *The Works of António A. Monteiro, Vol.s I-VIII,* Edited by Eduardo L. Ortiz and Alfredo Pereira Gomes, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisbon and The Humboldt Press, London 2008.

[AAM] António Monteiro, *Sur l'additivité des noyaux de Fredholm*, Thèse Univ. Paris, Junho 1936. (Portugaliae Math. 1 (1937), 1-172, in [AAM_O2008]).

[AF] Augusto Fitas, *As relações entre António Ribeiro Monteiro e a Junta de Educação Nacional ou um bolseiro português na cidade de Paris (do Outono de 1931 à Primavera de 1936)*, in [AAM_Bc2007], 89-127.

[AMF] Aureliano de Mira Fernandes *Distância e Vizinhança*, Técnica, Revista de Engenharia, n.º 62 (1934), 511-515, n.º 63 (1935), 1-5.

[APG] Alfredo Pereira Gomes, *O regresso de António Monteiro a Portugal de 1977 a 1979*, Portugaliae Math. 29 (1980), XXXIII-XLI.

[AW1] André Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale,* Hermann, Paris 1938.

[AW2] André Weil, *The Apprenticeship of a Mathematician*, Springer, Basel, 1992.

[B] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa, 1932.

[BI,II,III,IV] N. Bourbaki, ***É**léments de Mathématiques – Les Structures Fondamentales de l'Analyse,* Hermann, Paris*:* I – *THÉORIE DES ENSEMBLES (Fascicule de résultats)*, 1939; II – *TOPOLOGIE GÉNERALE (Chapitres I et II),* 1940; III – *TOPOLOGIE GÉNERALE (Chapitres III et IV)*, 1942; IV – *ALGÈBRE*, 1942.

[EO] Eduardo Ortiz, *Professor António Monteiro and Contemporary Mathematics in Argentina*, Portugaliae Math. 29 (1980), XIX-XXXII.

[F] Maurice Fréchet, *Les Espaces Abstraits, et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse Générale*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[IP] Ilda Perez*, António Monteiro e um relatório de 1939 para o Instituto para a Alta Cultura,* Boletim da Soc.Port.Mat. 68, Maio 2013, pp. 137–150

[JR1] Jorge Rezende, *Blogue <António Aniceto Monteiro>* http://antonioanicetomonteiro.blogspot.com/

[JR2] Jorge Rezende, *António Aniceto Monteiro – lutas, perseguições e exílios*, Bol.Soc.Port.Mat. 74 (nov.2016), 135-172.

[K] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

[LN] Leopoldo Nachbin, *The influence of António A. Ribeiro Monteiro in the development of Mathematics in Brazil,* Portugaliae Math. 29 (1980), XV-XVII.

[MCA] M. C. Almeida, *Centro de Estudos Matemáticos de Coimbra, 1938: um projecto*, Suplemento do Boletim da SPM 65, Outubro 2011, pp. 49-51.

[NW] N.Wiener, *I am a Mathematician,* The M.I.T. Press, 1956.

[PJC] Pedro José da Cunha, *Relexões sôbre a teoria dos conjuntos,* Extracto do Jornal Sciências Matemáticas, Físicas e Naturais, 3.ª série, n.º10 (1922), 62 pp.

[RLG] Ruy Luis Gomes, *Tentativas feitas nos anos 40 para criar no Porto uma Escola de Matemática*, Boletim SPM, 6 (out/1983), 29-48.

[S] W. Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[vW] B.L. van der Waarden, *Modern Algebra*, Vol. 1, Springer, Berlin, 1930.

ANEXO

ÍNDICE do ***"Ensaio sobre os FUNDAMENTOS da ANÁLISE GERAL"***
***Memórias da Academia das Ciências de Lisboa*, XLVII – Volume 2, pp. 27-169**

– *FIM na* página 130 (169).

E N S A I O

sobre

os

F U N D A M E N T O S da A N Á L I S E G E R A L

por

Antonio Aniceto Ribeiro Monteiro

Doutor em Ciencias Matemáticas

pela Universidade de Paris

Antonio Aniceto Ribeiro Monteiro

À MEMÓRIA

DE

M E U P A I

PREFÁCIO

A Análise Geral foi fundada no princípio dêste século por Maurice Fréchet, com o objectivo de generalizar o cálculo diferencial e integral para as funções em que a variável independente - e eventualmente a própria função - são elementos de natureza qualquer.

M.Fréchet considera a Análise Geral como tendo por objectivo o estudo das correspondências entre variáveis de natureza qualquer (veja NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE M. FRÉCHET , Paris 1933 e l'ARITHMÉTIQUE DE L'INFINI, Paris 1934) . Em particular nêste último trabalho diz que (p.8): " L'essentiel de ma contribuition à cette nouvelle théorie " est sans doute d'avoir montré comment on peut étudier les " transformations où, sans connaître la nature des éléments, " on en supposait au moins défini le voisinage " .

Cantor nos fins do século XIX fundou a teoria dos conjuntos abstractos , que Fréchet considera como um capítulo da Análise Geral.

Podemos dizer que a teoria dos conjuntos abstractos se ocupa das propriedades dos conjuntos de pontos que se mantêm invariantes em relação ao grupo das transformações biunívocas B .

Um segundo capítulo da Análise Geral é a Topologia que estuda as propriedades dos conjuntos de pontos que se mantêm invariantes em relação ao grupo das transformações bicontínuas ou homeomorfias. É claro que H é um sub-grupo de B. Os espaços de que se ocupa a topologia têm o nome de espaços topológicos.

Por outro lado a Álgebra Abstracta, que é um dos capítulos mais recentes da matemática moderna, estuda os conjuntos abstractos E onde se define pelo menos uma operação que a cada par ordenado (a, b) de elementos de E faz corresponder um único elemento de E ; daremos a um conjunto nestas condições o nome de espaço algébrico . As propriedades de que se ocupa a álgebra abstracta são aquelas que se mantêm invariantes em relação ao grupo I dos isomorfismos (correspondências biunívocas que respeitam a operação considerada) . I é evidentemente um sub-grupo de B.

A noção de espaço é aqui tomada no sentido que lhe atribuiu Uryshon - isto é: um espaço é um conjunto onde se define pelo menos uma relação entre os seus elementos. Essa relação é na teoria dos conjuntos abstractos a relação de igualdade, na topologia a operação de derivação e na álgebra abstracta uma ou mais operações algébricas. M. Fréchet considera que estas noções : " lorsqu'on voudra passer à la généralisation de l'Algébre e du calcul différentiel ne sont pas suffisantes " (veja L'ARITHMÉTIQUE DE L'INFINI pgs. 10). E M. Fréchet é assim levado, com o objectivo de generalizar a noção de diferencial abstracta, a estudar espaços vectoriais em que se define uma métrica ou mais geralmente uma topologia. Por outro lado o desenvolvimento da teoria dos operadores lineares e da Álgebra

Abstracta tem levado os analistas a considerar uma série de espaços da mesma natureza que nos interessa caracterizar dizendo que na sua definição intervêm simultâneamente noções de álgebra e da topologia.

Foi o reconhecimento dêste facto que nos levou a introduzir a noção de espaço algébrico-topológico - que podemos definir como um espaço onde existe simultâneamente uma álgebra e uma topologia, e a considerar um novo capítulo da Análise Geral; a que podemos chamar Análise Abstracta, que terá por objectivo o estudo das propriedades invariantes por um topo-isomorfismo, isto é, por uma correspondência biunívoca que é simultâneamente uma homeomorfia e um isomorfismo.

O conjunto T dos topo-isomorfismos formam um grupo que é simultâneamente um sub-grupo de H e de I. As propriedades que se estudam na Análise Abstracta são portanto simultâneamente propriedades algébricas e propriedades topológicas. A análise abstracta apresenta-se assim como um capítulo da Análise Geral, se considerarmos esta última como o estudo das correspondências entre elementos de natureza qualquer.

No capítulo IV damos também à Análise Abstracta o nome de Análise Geral, porque esta foi fundada por M. Fréchet com o objectivo de generalizar o cálculo diferencial e integral, e porque essa generalização só é possível precisamente nos espaços analíticos.

*

A noção fundamental da teoria dos conjuntos abstractos é a noção de potência de um conjunto, e a sua definição é tal que dois conjuntos com a mesma potência são necessàriamente equivalentes, isto é: existe entre êles uma correspondência biunívoca (Teorema de Cantor - Bernstein).

A noção fundamental da topologia é a noção de tipo de dimensão de um espaço, introduzido ainda por Fréchet. Se dois espaços E e F têm o mesmo tipo dimensional, êles não são necessàriamente homeomorfos; mas em todo o caso Banach demonstrou que é sempre possivel decompôr E e F em dois conjuntos

$$E = E_1 + E_2$$
$$F = F_1 + F_2$$

(onde E_1 e E_2 bem como F_1 e F_2 são disjuntos) tais que E_i é homeomorfo a F_i. ($i = 1,2$).

Fômos levados a introduzir na álgebra a noção de tipo algébrico de um espaço, cuja definição é indicada no capítulo II, mas não conseguimos nenhum resultado análogo ao teorema de Cantor - Bernstein ou ao teorema de Banach.

Na Análise Abstracta (capítulo IV) fômos levados a introduzir a noção fundamental de dimensão algébrica de um espaço algébrico-topológico, e a sua definição é tal que se dois esespaços têm a mesma dimensão algébrica êles têm necessàriamente o mesmo tipo algébrico e o mesmo tipo dimensional e portanto a mesma potência.

A noção de dimensão algébrica contém como caso particular a noção de dimensão linear de um espaço do tipo (F) introduzida recentemente por Banach (veja: TÉORIE DES OPÉRATIONES LINÉAIRES, VARSÓVIA, 1932; pgs. 193), é a única noção particular de dimensão algébrica que com nosso conhecimento foi até hoje considerada.

Êste exemplo mostra-nos que a noção de dimensão algébrica é de facto uma noção fundamental da Análise Abstracta.

A noção de espaço algébrico-topológico, tal como a noção de espaço (V), não é susceptivel de nos conduzir a propriedades muito numerosas e por isso fômos levados a particularizá-la introduzindo a noção de espaços analíticos (veja capítulo IV, § 2), para os quais é já possivel indicar um certo número de resultados importantes nas aplicações.

Nos espaços analíticos existe uma conexão entre a Álgebra e a topologia do espaço, o que não acontece necessàriamente nos espaços algébrico-topológicos. Encontramo-nos assim perante a realização de uma ideia que M. Fréchet foi levado à formular no estudo dos espaços vectoriais nos seguintes têrmos:

" Si, logiquement, on peut associer de manière quelconque
" dans un même espace les proprietés vectorielles et les pro-
" priétés de continuité, on risquerait de produire des mons-
" tres. En introduisant dans un même espace deux principes
" d'ordre, ceux-ci doivent coopérer et non s'opposer."

Particularizando a álgebra e a topologia do espaço analítico considerado poderiamos indicar um conjunto numeroso de espaços particulares. Limitá-mo-nos a indicar os mais importantes. Fômos também levados a procurar um teorema de estructura análogo ao teorema de Banach ou ao teorema de Cantor - Bernstein. Um tal teorema não deve existir no caso de um espaço analítico qualquer, mas existe para espaços particulares. Com êste objectivo introduzimos a noção de <u>grupos abelianos topológicos perfeitamente decomponiveis</u> para os quais conseguimos demonstrar um teorema análogo aos teoremas de Banach e de Cantor - Bernstein. Em particular podemos afirmar que se dois grupos abelianos topológicos perfeitamente decomponiveis têm a mesma dimensão algébrica êles são topo-isomorfos.

*

Foi à luz destas ideias gerais que procedemos à redacção dêste trabalho consagrado aos fundamentos da Análise Geral.

Um estudo crítico das noções fundamentais da teoria dos conjuntos abstractos mostra-nos que o conjunto $\mathcal{E}$ dos sub-conjuntos de um conjunto dado E é um espaço analítico, quando se definem em E as noções habituais de adição, intersecção e limite de uma sucessão de sub-conjuntos de E. Como estas noções são indispensáveis no desenvolvimento daquela teoria e em particular na demonstração do teorema fundamental de Cantor - Bernstein, fica assim demonstrado que a noção de espaço analítico é essencial na Análise Geral.

A algebrização dos sub-conjuntos de um conjunto desempenha portanto um papel importante na teoria dos conjuntos abstrastos, onde ela é feita de tal maneira que toda a equivalência é necessàriamente um isomorfismo. Mais geralmente mostrámos que toda a equivalência é um topo-isomorfismo.

Na álgebra abstracta fômos também levados a pôr em evidência o problema da algebrização de um espaço algébrico dado e não encontrámos, mesmo na teoria dos grupos, uma algebrização que gozasse de todas as propriedades encontradas na teoria dos conjuntos.

A melhor algebrização conhecida é aquela que se obtém com a relação do produto directo, ou de soma directa no caso dos grupos abelianos.

No capítulo consagrado à Topologia tomámos como noção fundamental a noção de espaço (V) que nos parece a noção primitiva mais intuitiva, dentre todas aquelas sôbre as quais se pode basear a topologia.

O estudo na noção de espaço (V), introduzida por Fréchet, levou-nos à conclusão de que é possivel definir de uma infinidade de maneiras diferentes a noção de ponto limite de um conjunto situado num espaço (V) e que portanto um espaço (V) pode dar origem a uma infinidade de topologias diferentes. É interessante notar que esta circunstância se pode mesmo apresentar em espaços (V) bastante particulares, como sejam por exemplo os espaços de Hausdorff. Fômos assim levados a introduzir duas condições suficientes (que devem verificar as vizinhanças) para que no espaço considerado haja apenas uma topologia. Uma dessas condições é já conhecida, ela intervém por exemplo na definição de espaço de Hausdorff, enquanto que a outra não a vimos indicada em parte alguma, muito embora ela represente uma ideia muito simples e intuitiva.

Uma catégoria importante de espaços (V) são aqueles em que existe uma conexão entre a operação de derivação e a adição de conjuntos, em particular aquêles para os quais

$$(1) \qquad D(A+B) = D(A) + D(B)$$

$$D^2(A) = D[D(A)] \subset D(A)$$

onde $D(A)$ representa um conjunto derivado de A. É o que acontece nos espaços acessiveis e nos espaços de Hausdorff.

Nos espaços analíticos importa sobretudo relacionar a topologia com a álgebra dos sub-espaços algébricos do espaço dado e em particular, na teoria dos grupos abelianos, com os conjuntos que estão em relação de soma directa.

Fômos com êsse fim levados a considerar os grupos abelianos prefeitamente decomponiveis para os quais

$$D(A \oplus B) = D(A) \oplus D(B)$$

relação análoga à condição (1).

x

Além dos resultados já indicados apresentamos no decorrer dêste trabalho um certo número de proposições e de noções novas que o leitor reconhecerá sem dificuldade, limitando-nos a indicar aqui a generalização para um anel da noção de aditividade, de que tratámos com desenvolvimento na nossa Tése de Doutoramento na Universidade de Paris. Não damos qui a demonstração dessas propriedades que são em tudo análogas às indicadas no referido trabalho.

Na teoria dos grupos normados mostrámos ràpidamente que é possivel fazer uma teoria das séries.

Dq mesmo modo é possivel uma teoria Weierstrassiana das funções analíticas de uma variavel complexa cujo contra-domínio é um elemente dum espaço completo de Banach.

Na teoria dos anéis métricos é possivel fazer uma teoria da resolvente análoga à de Fredholm para a qual indicamos ainda uma generalização des~~[illegible]~~ núcleos aditivos.

x

Se com a realização dêste trabalho conseguirmmes chamar à atenção dos jóvens estudiosos do nosso país para a importância sempre crescente da Análise Geral, fundada por M. Fréchet, cujos métodos tendem a dominar a estruturação da matemática moderna, podemos considerar o nosso objectivo como atingido porque pensamos que nestas condições servimos a ciência de uma maneira geral e os estudiosos portuguêses em particular. Por essa razão apresentamos êste trabalho à Academia das Ciências de Lisboa para o concurso ao Prémio Científico Artur Malheiros de 1938.

BIBLIOGRAFIA

S. Baanach(1) Un théorème sur les transformation biunivoques. F. M. T. 6(p.236-239)

(2)-Théorie des opérations linéaires.Da colecção Monografje Matematyczne, Warszawa 1932.

(3)-Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.F. M. T. 3 (p.133-181)

M. Fréchet.(1) Les espaces Abstraits et leur théorie considerée comme introduction à l'Analyse Générale. Collection de monographies sur la théorie des fonctions de M. Émile Borel. Paris.1928.

(2)- Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits. Bulletin des Sciences Mathématiques.(2), T. 42, (1918) (p.138-156)

Hellinger und Teeplitz.(1). Mathematischen Annalen.vol. 69(1910).(p.289-330).

C. Kuratowski(1) Topologie I. Espaces métrisables, espaces complets. Da colecção:Monografje Matematyczne. Warzawa. 1933

A. Lindenbaum.(1). Sur les espaces métriques. Fund. Math. T 8 (1926) p.211.

Mazur et Ulam(1). Annales de la Société Polonaise de Mathématiques . Tome 9. p. 204.

A. Monteiro. (1).Sur les noyaux additifs dans la théorie des équations intégrales de Fredholm.Comptes Rendus. t. 198, 1 sem. 1934(p.1737)

(2) Sur l'additivité des noyaux de Fredholm Portugaliae Mathematica, tome 1, (pag. 1-172)

M. Nagumo(1) Einige analytische untersuchungen in linearen metrischen Räumen. Collected papers from the Faculty of Science, Osaka Imperial University. Series A Mathematics. vol. IV. 1936.

Sierpinski(1)- Leçons sur les nombres transfinis. Collection de monographies sur la théorie des fonctions de M. E. Borel. Paris. 1928.

(2)- Sur la non existence d'opérations universelle pour les ensembles dénombrables. F. Math. T. 29. p. 9 (1937)

Tychonoff e Vedenissoff. (1)-Sur le dévelopement moderne de la théorie des espaces abstraits. Bulletin des Sciences Mathématiques. (2) Tome 50. 1926: (p. 15-27).

B. L. van der Waerden-(1) Moderne Algebra. Band 1-2 Berlin 1930

H. Weil. (1) Sur les espaces à structure uniforme et la topologie générale. Hermann-Paris. 1938.

14

CAPITULO I

A TEORIA DOS CONJUNTOS ABSTRACTOS

1- Conjuntos abstractos. A noção de conjunto abstracto é a noção fundamental da matemática moderna. Ela intervém, por exemplo, como teremos ocasião de vêr, na Álgebra Abstracta, na Topologia Geral e na Análise Geral. A exposição do objectivo da teoria dos conjuntos abstractos deve portanto preceder uma exposição relativa a cada uma daquelas teorias.

Dá-se o nome de conjunto abstracto a todo o conjunto em que se abstrai da natureza dos seus elementos. Um conjunto abstracto pode portanto ser constituido por pontos, funções, números, rectas, equações, operadores, etc. sem que nos importe especificar que se trata de elementos desta ou daquela natureza.

Nestas condições os elementos do conjunto tem o nome de elementos abstractos ou indefinidos. Para indicar que um elemento a pertence a um conjunto A escrevemos (segundo G. Peano)

$$a \in A$$

e para indicar que a não pertence ao conjunto A, escreveremos

$$a \notin A$$

Para representarmos o conjunto formado pelo elemento a usaremos a notação (a).

2-Noção de igualdade. Dado um conjunto abstracto A, diremos que a noção de igualdade está definida sôbre A, quando para cada par ordenado (a,b) de elementos de A existe uma relação que verifica as seguintes

2

condições:

I_1- Determinação: Para cada par ordenado (a,b) de elementos de A ou existe a relação em questão, e então escreveremos $a = b$ (leia-se a igual a b) ou então não existe essa relação e escreveremos $a \neq b$ (leia-se a diferente de b).

I_2 - Propriedade reflexiva: para cada elemento a de A tem-se $a = a$

I_3 - Simetria. Se $a = b$ será tambem $b = a$.

I_4 - Transitividade. Se $a = b$ e $b = c$ então será: $a = c$, quaisquer que sejam a, b e c de A.

Num mesmo conjunto A podem existir várias relações de igualdade. (É o que acontece, por exemplo, na teoria dos vectores onde se definem diferentes relações de igualdade que dão origem ás noções de vectores livres, deslizantes e aplicados).

Se uma das relações de igualdade deve ser considerada como fundamental em relação a outras aquela tem o nome de identidade e a outra ou as outras têm o nome de equivalências.

Para notar a identidade será então usado um dos símbolos $=$ ou $\equiv$, e para as equivalências um dos símbolos $\sim$, $\simeq$, $\approx$, $\cong$, $\overset{\sim}{=}$, $\overset{\approx}{=}$, etc.

33 Sub-conjuntos. Se todos os elementos de um conjunto A são elementos de outro conjunto B, diremos que A é um sub-conjunto de B e escreveremos para indicar êsse facto:

$$A \subset B$$

$$\text{ou} \quad B \supset A$$

relações que se lêm respectivamente: o conjunto A é um sub-conjunto de B ou A é uma parte de B, e B tem A como sub-conjunto ou B contém A.

A relação entre dois conjuntos A e B que representamos pelo símbolo $\subset$ dá-se o nome de relação de inclusão.

3

É evidente que a relação de inclusão gosa da propriedade <u>transitiva</u>, isto é: se A é sub-conjunto de B e B é um sub-conjunto de C, A é ainda um sub-conjunto de C, isto é:

$$A \subset B \text{ e } B \subset C$$

implicam

$$A \subset C$$

4- <u>Igualdade de conjuntos</u>. Seja E um conjunto abstracto qualquer e seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos sub-conjuntos de E. Diremos que dois conjuntos $A \in \mathcal{E}$ e $B \in \mathcal{E}$ são iguais (e escreveremos $A = B$) quando fôrem verificados simultâneamente as duas seguintes condições:

$$A \subset B \qquad\qquad B \supset A$$

Como todo o elemento de A é um elemento de B e reciprocamente, vê-se imediatamente que A e B contém os mesmos elementos, isto é, os dois conjuntos A e B são idênticos. O leitor pode verificar sem dificuldade que são verificados, para a relação de igualdade assim definida, os axiomas I_1, I_2, I_3 e I_4. Para indicar que dois conjuntos A e B não são idênticos escreveremos $A \neq B$

5- <u>Observação</u>. Cada relação de igualdade definida sôbre um conjunto A, define simultâneamemte uma classe de sub-conjuntos de A sem elementos comuns dois a dois, ou ainda como se costuma dizer uma classe de sub-conjuntos disjuntos de A.

Com efeito consideremos o conjunto $\mathcal{U}$ dos elementos de A que são iguais a um elemento a de A; daremos a $\mathcal{U}$ o nome de classe gerada por a. É evidente que as duas classes geradas pelos elementos a e b só podem ser idênticas se fôr $a = b$.

Pode acontecer que a classe gerada por $a \in A$ seja constituida únicamente pelo elemento a, no caso contrário diremos que a é um elemento representativo da classe $\mathcal{U}$.

Esta observação vai-nos permitir precisar a noção de conjunto.
Para que um conjunto A, seja déterminado, é necessario que sejam verificadas as seguintes condições.

1º) Dado um elemento a qualquer, mas bem determinado, das duas uma ou $a \in A$, ou $a \notin A$.

2º) No conjunto A existe uma relação de igualdade tal que a classe gerada por um elemento qualquer $a \in A$ é constituida únicamente ~~pelo e unicamente~~ pelo elemento a.

Assim por exemplo: no conjunto constituido pelos números 1,3,3, os dois números 3 que nêle figuram devem ser considerados como elementos diferentes, e nestas condições a relação de igualdade a que ~~se~~ refere a condição 2º) não pode ser a relação de igualdade entre números inteiros.

A teoria dos conjuntos abstractos ocupa-se dos conjuntos A que verificam as duas condições 1º e 2º), isto é, ocupa-se dos conjuntos A para osquais: 1º) nós podemos decidir se um elemento dado pertence ou não ao conjunto A

2º) sabemos distinguir uns dos outros os elementos que pertencem ao conjunto A.

7- Noção de função. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois conjuntos em cada um dos quais foi defenida uma relação de igualdade que podemos representar pelo mesmo símbolo = , sem perigo de confusão, se tivermos o cuidado de indicar as lêtras que utilizamos para representar os elementos de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$.

Suponhamos que a cada elemento $x \in \mathcal{X}$ fazemos corresponder um elemento y e um só de $\mathcal{Y}$ que representaremos pela notação f (x)

$$y = f(x)$$

de tal maneira que todo e qualqer elemento y de $\mathcal{Y}$ é o correspondente

5

de um elemento pelo menos de $\mathcal{X}$. Nestas condições diremos que $y = f(x)$ é uma função uniforme cujo dominio é $\mathcal{X}$ e cujo contra-dominio é $\mathcal{Y}$. Também é costume dar-se a $\mathcal{X}$ o nome de <u>conjunto dos argumentos</u> e a $\mathcal{Y}$ o nome de conjunto dos valores da função $y = f(x)$. Podemos ainda dizer que a função f transforma $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$.

~~isto é~~ Se $X \subset \mathcal{X}$ representaremos por $f(X) \subset \mathcal{Y}$ o conjunto dos elementos de $\mathcal{Y}$ que dorrespondem aos elementos de X.

Se ~~fôr~~ $Y \subset \mathcal{Y}$ representaremos por $f^{-1}(Y)$ o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{X}$ cujos valores pertencem a Y.

8- <u>Homomorfismos em relação à igualdade</u>. Diremos que f define um homomorfismo de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ relativamente às relações de igualdade anteriormente consideradas quando fôr verificada a seguinte condição: $x_1 = x_2$ implica $f(x_1) = f(x_2)$ quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathcal{X}$.

A função f é portanto uma transformação que respeita as relações de igualdade definidas em $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.

Como na teoria dos conjuntos dois elementos distinctos pertencentes a um mesmo conjunto devem ser considerados como diferentes ($\neq$) toda a transformação de um conjunto $\mathcal{X}$ num conjunto $\mathcal{Y}$ será sempre um homomorfismo relativamente às relações de igualdade definidas em $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. ( )

9- <u>Transformações biunívocas</u>. Diremos que $y = f(x)$ transforma $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ de uma maneira biunívoca quando a igualdade

$$(1) \quad f(x_1) = f(x_2)$$

implicar a igualdade

$$(2) \quad x_1 = x_2$$

nestas condições as igualdades (1) e (2) são equivalentes.

Nêste caso existe a função inversa $x = f^{-1}(y)$ que transforma $\mathcal{Y}$ em $\mathcal{X}$ de uma maneira biunívoca.

Dados dois conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, se existir uma transformação biunívoca

6

de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ (ou o que é o mesmo de $\mathcal{Y}$ em $\mathcal{X}$) diremos que os dois conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são <u>equivalentes</u> e escreveremos:

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$$

A relação de equivalência gosa de todas as propriedades da relação de igualdade, com efeito:

I - Dados dois conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ ou é verificada a relação $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$ ou não é verificada $(\mathcal{X} \nsim \mathcal{Y})$

I - $\mathcal{X} \sim \mathcal{X}$, basta considerar a transformação $x = f(x)$ onde $x \in \mathcal{X}$.

I - Se $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$ será $\mathcal{Y} \sim \mathcal{X}$ como vimos precedentemente.

I - Se $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y} \sim \mathcal{Z}$ será $\mathcal{X} \sim \mathcal{Z}$. Com efeito seja $f(x) = y$ uma transformação biunívoca de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ e $z = g(y)$ uma transformação biunívoca de $\mathcal{Y}$ em $\mathcal{Z}$. A transformação

$$z = g[f(x)] = h(x)$$

é uma transformação biunívoca de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Z}$, como é fácil de verificar.

10- <u>Objectivo da teoria dos conjuntos abstractos</u>. A teoria dos conjuntos abstractos estuda as propriedades dos conjuntos abstractos que se mantêm invariantes quando se passa de um conjunto para um outro que lhe seja equivalente, ou o que é o mesmo, quando se efectua sobre um conjunto uma transformação biunívoca.

Podemos portanto dizer que na teoria dos conjuntos é impossivel distinguir dois conjuntos equivalentes; Tôdas as propriedades de um dos conjuntos pertencem ao outro conjunto e recíprocamente.

Na teoria dos conjuntos quando estudarmos as propriedades de um conjunto determinado A, estudamos ao mesmo tempo as propriedades comuns a todos os conjuntos equivalentes a A.

Podemos ainda apresentar a mesma ideia da seguinte maneira: seja $\mathcal{F}(A)$ a família (isto é o conjunto) de todos os conjuntos equivalentes ao conjunto A; a teoria dos conjuntos estuda as propriedades d $\mathcal{P}$ de cada uma das famílias $\mathcal{F}$ que gosam da seguinte propriedade 1º)

7

1º) Se existe um elemento da família $\mathcal{F}$ que tem a propriedade $\mathcal{P}$, todos os elementos da família $\mathcal{F}$ tem a mesma propriedade $\mathcal{P}$.

As funções proposicionais primitivas da teoria dos conjuntos são: a igualdade $x = y$ e a noção de elemento de um conjunto $x \in A$.
Com aas operações fundamentais da Lógica formal e com estas duas noções primitivas da teoria dos conjuntos pode-se construir tôda a teoria dos conjuntos abstractos; toda a função proposicional assim obtida será uma função proposicional conjuntiva.
Se f fôr uma transformação biunívoca de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$, tivemos ocasião de vêr que $x_1 = x_2$ é equivalente a $f(x_1) = f(x_2)$
Por outro lado é evidente que se $x \in \mathcal{X}$ será $f(x) \in f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.
Isto é a relação de igualdade e a propriedade de ser elemento de um conjunto mantêm-se quando se passa de um conjunto para outro equivalente. Nestas condições de toda a proposição que se possa enunciar para o conjunto A em que intervenham apenas as noções primitivas $x = y$ e $x \in A$, se pode deduzir uma outra relativa ao conjunto f(A) que se obtem substituindo x por f(x).
Podemos ainda dizer que as propriedades de que se ocupa a teoria dos conjuntos abstractos, isto é aquelas que se mantêm invariantes por uma equivalência, são aquelas que se podem enunciar recorrendo apenas às noções primitivas da teoria dos conjuntos $x = y$ e $x \in A$ e às funções proposicionais da Lógica formal.
Exemplo I- Um conjunto formado por um único elemento pode ser caracterisado como um conjunto A que gosa das seguintes propriedades
1º) existe um objecto x tal que $x \in A$
2º) se $y \in A$ será $x = y$.
Se f fôr uma equivalência, o conjunto f (A) gosa ainda das duas propriedades:
1º) existe um objecto $f(x)$ tal que $f(x) \in f(A)$
2º) Se $f(y) \in f(A)$ será $f(x) = f(y)$

8

donde se conclui que $f(A)$ é formado por um único elemento.

Exemplo II. Dados dois conjuntos $A \in \mathcal{X}$ e $B \in \mathcal{X}$ diz-se que êles são disjuntos se não têm nenhun elemento comum, propriedade que pode ser carecterizada pela seguinte condição:

c) Não existe nenhum objecto x tal que $x \in A$ e $x \in B$

Se f fôr uma equivalência que transforma x em y podemos dizer:

c) Não existe nenhum objecto $f(x)$ tal que $f(x) \in f(A)$ e $f(x) \in f(B)$

Nestas condições $f(A)$ e $f(B)$ são disjuntos.

11- Potência de um conjunto infinito ou número cardinal.

Vamos agora abordar o estudo da noção de número cardinal ou de potência de um conjunto, que é a noção fundamental da teoria do dos conjuntos abstractos.

Definições : I- Diremos que dois conjuntos abstractos infinitos A e B têm o mesmo número cardinal ou a mesma potência, se A for equivalente a um sub-conjunto $B_1 \subset B$ e se B fôr equivalente a um sub- conjunto $A_1 \subset A$.

Nestas condições escreveremos

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$$

(leia-se: potência de A igual à potência de B)

II- Diremos que a potência ou o número cardinal do conjunto A é superior á potencia do conjunto B se A fôr equivalente a um sub-conjunto $B_1 \subset B$ e se B não fôr equivalente a nenhum sub-conjunto $A_1 \subset A$, Então escreveremos

$$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$$

Nestas mesmas condições também é costume dizer-se que a potência do conjunto B é inferior à potência do conjunto A e escrever

$$\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$$

9

Há ainda lògicamente dois casos possiveis.

III-A potência de A é inferior à potência de B e então escreveremos

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$$

cuja defenição acaba de ser dada.

IV- Diremos que a potência de A é incomparavel com a potência de B se A não fôr equivalente a nenhum sub-conjunto $B_1 \subset B$ e se B não fôr equivalente a nenhum sub-conjunto, $A_1 \subset A$.

É necessário fazer algumas observações sobre as defenições precedentes. 1º) Em primeiro lugar é evidente que se dois conjuntos A e B são equivalentes êles têm a mesma potência, isto é: se $A \sim B$ será $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$

Ora a recíproca desta proposição também é verdadeira, isto é: se dois conjuntos A e B têm a mesma potência êsses dois conjuntos são equivalentes, isto é:

se $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$

será $A \sim B$

Esta proposição é conhecida pelo nome de Teorema de Cantor-Bernstein e ela domina toda a teoria dos conjuntos abstractos. A sua demonstração será indicada mais adiante no capitulo II, e será baseada num teorema de Banach.

O que é importante dizer nêste momento é que é impossivel demonstrar o teorema de Cantor-Bernstein antes de estudarmos a Álgebra dos sub-conjuntos de um conjunto dado; porque nessa teoria se introduzem noções que são indispensáveis para a demonstração do referido teorema, em particular as noções de soma e de intersecção de dois ou mais conjuntos. Ora como nós pretendemos fazer um estudo crítico das noções fundamentais da Análise Moderna é natural que não estudemos a Álgebra dos conjuntos antes de defenirmos com precisão o objectivo da Álgebra Abstracta, e de indicarmos as noções fundamentais dessa doutrina.

10

Em tôdas as exposições que conhecemos da teoria dos conjuntos abstractos, as noções de soma e de intersecção de dois ou mais conjuntos costumam ser apresentadas logo de início e estudadas com todo o detalhe. Veja-se por exemplo o curso de Sierpinski (pag 5 e seguintes). Nestas condições poder-se-ia preguntar se essas condições devem ou não figurar numa exposição da teoria dos conjuntos abstractos.

É claro que nós estamos em condições de dar uma resposta a esta questão, visto que já definimos (nº 10) o objectivo da teoria dos conjuntos abstractos e possuimos mesmo um critério que nos permite reconhecer se uma noção determinada deve ser ou não estudada na teoria dos conjuntos abstractos. As noções de que se ocupa a teoria dos conjuntos abstractos são aquelas que podem ser definidas recorrendo apenas às noções primitivas da teoria dos conjuntos $x = y$ e $x \in A$ e às funções proposicionais da Lógica formal.

Ora é facil de reconhecer como teremos ocasião de vêr que as noções de soma e de intersecção de dois conjuntos, estão precisamente nessas condições; trata-se portanto de duas noções que pertencem à teoria dos conjuntos abstractos, na qual são estudados habitualmente.

Mas é preciso também dizer, que essas noções são ao mesmo tempo noções de Álgebra, como teremos ocasião de vêr, e que portanto também é possivel sem inconveniente estudá-las no capítulo consagrado à Algebra Abstracta. Decidimos proceder assim, não só para simplificar a exposição, mas também porque nos pareceu que melhor poderiamos nessa altura pôr em evidência certas caracteristicas da Algebra dos conjuntos. Por outro lado ficará assim em evidência a ideia de que: a algebrização dos sub-conjuntos de um conjunto dado desempenha um papel de primeira importância no desenvolvimento da teoria dos conjuntos

11

abstractos.

Se admitirmos provisòriamente o teorema de Cantor-Bernstein, podemos dizer que para que dois conjuntos A e B tenham a mesma potência é necessário e suficiente que êles sejam equivalentes. A noção de potência de um conjunto A apresenta-se assim como uma propriedade comum a todos os conjuntos equivalentes ao conjunto A.

A concretização da noção de potência pode então ser apresentada da seguinte maneira: Seja A um conjunto infinito determinado, para fixar ideias podemos supôr que A é o conjunto formado pela sucessão natural dos números inteiros.

A) $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$

diremos que um conjunto qualquer B tem a potência do númerável (ou é um conjunto númerável) se êsse conjunto fôr equivalente ao conjunto A). Seja b_0 o elemento de B que corresponde ao número zéro, b_1 aquêle que corresponde ao número 1,..., b_n aquêle que corresponde ao número inteiro n, etc. O conjunto B será

$$b_0, \; b_1, \; b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

A potência do númeravel representa-se pelo símbolo $\aleph_0$ (alefa indice zéro).

Um outro exemplo de concretização da noção potência é o seguinte: seja C o conjunto dos números reais a que passaremos a dar o nome de contínuo, diremos que um conjunto C' tem a potência do contínuo se C' fôr equivalente a C.

A potência do contínuo será representada pela letra gótica $\mathfrak{C}$.

A possibilidade da existência de uma teoria dos números cardinais transfinitos baseia-se no facto de existirem conjuntos infinitos com potências diferentes, porque no caso contrário existiria um único número cardinal transfinito e portanto nada mais haveria a dizer sobre os números cardinais transfinitos.

Prova-se por exemplo que $\aleph_0 < \mathfrak{C}$

12

12- O Problema da tricotomia e o axioma de Zermelo. Dados dois números cardinais m e n é evidente, em virtude das definições dadas no nº precedente, que qualquer das condições

$$m < n \; ; \; m > n \; ; \; m = n$$

exclui as duas puttas. Portanto dois números cardinais podem estar relacionados quando muito por um dos três sinais

$$< \, , \; > \, , \; =$$

o que não quer dizer que seja sempre possível reunir dois números cardinais quaisquer dados por um dos três sinais $<$, $>$, $=$, (problema da tricotomia). Para que assim seja é necessario e suficiente que não existam dois conjuntos de potências incomparaveis.

Se o problema da tricotomia se resolve pela afirmativa então: se pudermos afirmar que não se verifica a condição

$$m < n$$

Podemos afirmar que é verificada a desigualdade

$$m \geqslant n$$

Um dos resultados mais importantes da teoria dos conjuntos é o seguinte: a tricotomia é equivalente ao axioma de Zermelo.

O Axioma de Zermelo, sempre tão discutido, pode enunciar-se da seguinte maneira:

Se os elementos de um conjunto A são conjuntos E, não vazios e sem elementos comuns dois a dois, então existe pelo menos um conjunto A′ que contem um elemento e um só de cada conjunto E.

12- Propriedades da desigualdade de potências. A desigualdade de potências verifica as seguintes propriedades formais das desigualdades ordinárias. Representaremos, para simplificar a escrita, a potência de um conjunto A pelo símbolo p (A).

1º) Se $A = B$ $\quad p(A) = p(B)$

2º) Se $p(A) = p(B)$ é $p(B) = p(A)$

3º) Se $p(A) = p(B)$ e $p(B) = p(C)$ será $p(A) = p(C)$.

4º) Se A ... B será p(A) p(B)

13

4ª) Se $A \subset B$ será $p(a) \leq p(B)$

5ª) Se $p(A) \leq p(B) \leq p(C)$ será $p(A) \leq p(C)$

6ª) Se $p(A) \leq p(B) < p(c)$

ou $p(A) < p(B) \leq p(c)$

será $p(A) < p(c)$

14

Capítulo II

Álgebra Abstracta

§1-Operações algébricas.

1-Defènições. A Álgebra Abstracta é um dos capítulos mais recentes da Matemática Moderna, visto que o início do seu desenvolvimento se pode localizar por volta de 1920. Teremos ocasião de defènir com todo o rigor o objectivo da álgebra abstracta mas podemos desde já dizer que ela se ocupa de certas propriedades dos conjuntos abstractos onde além da noção de igualdade foram defenidas uma ou mais operações algébricas.

Operação algébrica. Dado um conjunto abstracto E onde existe uma relação de igualdade, diremos que em E foi defènida uma operação algébrica $\odot$ quando a cada par ordenado (a,b) de elementos (iguais ou diferentes) de E se faz corresponder uma entidade que representaremos pela notação $a \odot b$ e que verifica as seguintes condições:

Exitência.

Axioma O_1. Se $a \in E$ e $b \in E$ será

$$a \odot b \in E$$

quaisquer que sejam a e b de E.

Uniformidade.

Axioma O_2. Se $a = a_1$ e $b = b_1$ será:

$$a \odot b = a_1 \odot b_1$$

A noção de uniformidade de uma operação defenida em E está portanto intimamente relacionada com a noção de igualdade defènida em E. Isto é: uma operação pode ser uniforme relativamente a uma relação de igualdade e não o ser relativamente a outra. Seria facil indicar vários exemplos.

15

Quere-nos parecer que êste facto ainda não foi convenientemente assinalado.

Defènir uma operação algébrica no conjunto abstracto E equivale a defènir uma função de duas variaveis f(a,b) onde a e b são elementos de E e cujos valores pertencem ao conjunto E,

Dá-se o nome de espaço algébrico a todo o conjunto abstracto onde foi defènido pelo menos uma operação algébrica. É claro que num espaço algébrico podem ser defènidos duas ou mais operações algébricas.

2-Sub-espaço algébrico. Seja E_1 um sub-conjunto de E, diremos que E_1 é um sub-espaço algébrico de E se E_1 fôr um espaço algébrico relativamente á operação $\odot$ defènido em E e para isso é necessario e suficiente que se a e b forem dois elementos de E_1 o elemento $a \odot b$ seja ainda um elemento de E_1 quaisquer que sejam a e b de E_1

Para indicarmos que E é um espaço algébrico relativamente à operação $\odot$ defènida em E utilizaremos a notação $E(\odot)$, nestas condições para indicarmos que $E_1(\odot)$ é um sub-espaço algébrico de $E(\odot)$ escreveremos

$$E_1(\odot) \subset E(\odot)$$

É evidente que se $E_1(\odot)$ é um sub-espaço algébrico de $E_2(\odot)$ e se F $(\odot)$ é um sub-espaço algébrico de E $(\odot)$, $E_1(\odot)$ é ainda um sub-espaço algébrico de E_3 $(\odot)$, isto é se fôr:

$$E_1(\odot) \subset E_2(\odot) \text{ e } E_2(\odot) \subset E_3(\odot)$$

será ainda

$$E_1(\odot) \subset E_3(\odot)$$

os sub-espaços algébricos de um espaço algébrico dado desempenham na Álgebra Abstracta o mesmo papel que a noção de sub-conjunto na teoria dos conjuntos abstractos.

3-Homomorfismos-Sejam $E(\odot)$ e $E'(\odot')$ dois espaços algébricos e ~~indicare~~ considere-remos uma transformação T cujo domínio é E e cujo contra-dominio é E'. Té é uma transformação da forma

16

$$a' = T(a)$$

onde $a \in E$ e $a' \in E'$.

Diremos que T define um homomorfismo de E em E' relativamente às operações $\odot$ e $\odot'$, se T respeita as operações defenidas em E e E'.

Duma maneira mais precisa seja:

$$a' = T(a)$$
$$b' = T(b)$$

e

$$c = a \odot b$$
$$c' = a' \odot' b'$$

A transformação T será um homomorfismo se fôr

$$c' \quad T(c)$$

quaisquer que sejam a e b de E, isto é se fôr

$$T(a) \odot' T(b) = T(a \odot b)$$

Se em cada um dos espaços E e E' forem defenidos duas ou mais operações, Θ_1 e Θ_2 em E, Θ_1' e Θ_2' em E' diremos que T define um homomorfismo de $E(\Theta_1, \Theta_2)$ em $E(\Theta_1', \Theta_2')$ se T fôr simultâneamente um homomorfismo relativamente às operações Θ_1 e Θ_2' e às operações Θ_2 e Θ_2', isto é se fôr:

$$T(a) \quad \Theta_1' \quad T(b) = T(a \Theta_1 b)$$
$$T(a) \quad \Theta_2' \quad T(b) = T(a \Theta_2 b)$$

4-Isomorfismos e Automorfismos. Diremos que dois espaços $E(\odot)$ e $E'(\odot)$ são isomorfos se existe uma correspondência biunívoca entre E e E' que respeita as leis da composição Θ e Θ'.

Para indicar que $E(\odot)$ e $E'(\odot')$ são dois espaços isomorfos escreveremos

$$E(\odot) \cong E'(\odot')$$

Se E' é um espaço idêntico a E e se Θ' é a mesma operação que Θ o isomorfismo toma então o nome de automorfismo .

17

É fácil verificar que a relação de isomorfismo gosa de todas as propriedades da relação de igualdade.

5-Objectivo da Álgebra Abstracta. A álgebra abstracta estuda as propriedades dos espaços algébricos que se mantêm invariantes quando se passa de um espaço algébrico para outro que lhe seja isomorfo. Na Álgebra Abstracta é impossivel distinguir dois espaços algébricos isomorfos; todas as propriedades algébricas de um dos espaços pertencem ao outro e reciprocamente. Em Álgebra Abstracta quando estudamos as propriedades de um espaço àlgébrico determinado E(o) estudamos ao mesmo tempo as propriedades comuns a todos os espaços algébricos isomorfos a E(o).

Nestas condições podemos dizer que as noções e propriedades de que se ocupa a Álgebra Abstracta são aquelas que se podem enunciar recorrendo apenas às noções primitivas da Álgebra $a = b$, $a \in E(o)$ e $c = a \odot b$ e às funções proposicionais da Lógica formal.

É o que acontece às noções de sistema com multiplicação, grupo, grupo abeliano, anel corpo, etc, de que nos vamos ocupar.

6-Espaço álgébrico Universal. Seja E(o) um espaço algébrico e seja $\mathfrak{M}$ a potência de conjunto E.

Diremos que E(o) é um espaço algébrico universal, se dado um espaço algébrico qualquer $E'(o')$ de potência $\mathfrak{M}$, existir um sub-espaço algébrico $E''(o) \subset E(o)$, que seja isomorfo a $E'(o')$.

W. Sierpinski [2] demonstrou que não existe um espaço algébrico numerável universal. Será importante abordar o estudo dêste problema para espaços com uma potência diferente da do numerável e para espaços algébricos com mais do que uma operação.

Se a operação não fôr completamente arbitrária pode acontecer como t teremos ocasião de indicar que existam espaços algébricos universais.

7-Axiomas Fundamentais. Nos sistemas algébricos mais importantes nas aplicações intervêm em regra uma ou duas operações; a uma delas da-

18

remos o nome de **adição** e será representada pelo sinal $(+)$, e à outra daremos o nome de **multiplicação** e será representada pelo sinal $(\cdot)$.
Em regra essas operações não são completamente arbitrárias, satisfazem pelo contrário a um certo número de axiomas que caracterizam os espaços algébricos correspondentes.
Vamos indicar uma lista dêsses axiomas que nos permitirá definir com facilidade os espaços algébricos mais importantes que teremos a considerar.

8-**Axiomas da Adição.**

A_1 - **Existência.** Dados dois elementos arbitrários **a** e **b** de E, o elemento $a+b$ pertence a E.

A_2 - **Unicidade.** Se $a=a_1$ e $b=b_1$ será: $a+b=a_1+b_1$

A_3 - **Lei associativa.** $(a+b)+c=a+(b+c)$

A_4 - **Existência de um zéro.** Existe um elemento $\theta \in E$ tal que $a+\theta = \theta+a = a$, qualquer que seja o elemento **a** de E. Às vezes é útil substituir êste axioma pelos dois seguintes:

A'_4 -**Existência de um zéro à esquerda.** Existe um elemento $\theta' \in E$ (zéro à esquerda) tal que $\theta+a=a$ qualquer que seja $a \in E$

A''_4 - **Existência de zéro à direita.** Existe um elemento $\theta'' \in E$ (zéro à direita) tal que $a+\theta''=a$ qualquer que seja $a \in E$.

A_5 - **Existência de um simétrico.** Para cada elemento $a \in E$ existe um outro $(-a)$, simétrico de **a**, tal que $(-a)+a=a+(-a)=\theta$
Às vezes é útil substituir êste axioma pelos dois seguintes:

A'_5 - **Existência de um simétrico à esquerda.** Para cada elemento $a \in E$ existe um outro $(-a_e)$, simétrico à esquerda, tal que $(-a_e)+a=\theta'$

A''_5 - **Existência de um simétrico à direita.** Para cada elemento $a \in E$ existe um outro $(-a_d)$, simétrico à direita, tal que $a+(-a_d)=\theta''$.

19

A_6- Lei comutativa: $a+b=b+a$ quaisquer que sejam os elementos a e b de E.

A_7- Existência de um elemento absorvente ω. Existe um elemento $\omega \in E$ tal que:

$$a+\omega=\omega+a\omega$$

qualquer que seja $a \in E$.

9- Axiomas da multiplicação.

M_1- Existência. Dados dois elementos arbitrários a e b de E, o elemento a b pertence a E.

M_2-Unicidade. Se $a=a_1$ e $b=b_1$ será: $ab=a_1 . b_1$

M_3- Lei associativa. $(a.b).c=a.(b.c)$

M_4- Existência de uma unidade. Existe um elemento $e \subset E$ tal que $ae=ea=a$ qualquer que seja o elemento a de E. Às vezes é util substituir êste axioma pelos dois seguintes:

M_4'- Existência de uma unidade à esquerda. Existe um elemento $e' \in E$ (unidade à esquerda) tal que $e'.a=a$ qualquer que seja $a \in E$.

M_4''- Existência de uma unidade à direita. Existe um elemento $e'' \in E$ (unidade à direita) tal que $ae''=a$ qualquer que seja $a \in E$.

M_5- Existência de um inverso. Para cada elemento $a \in E$ existe outro a^{-1}, inverso de a, tal que $a^{-1}.a=a.a^{-1}=e$. Às vezes é útil substituir êste axioma pelos dois seguintes:

M_5'-Existência de um inverso à esquerda. Para cada elemento $a \in E$ existe um outro a_e^{-1}, inverso à esquerda tal que:

$$a_e^{-1}.a=e'$$

M_5''- Existência de um inverso à direita. Para cada elemento $a \in E$ existe um outro a_d^{-1}, inverso à direita, tal que:

$$a.a_d^{-1}=e''$$

M_6-Lei comutativa. $a.b=b.a$ quaisquer que sejam os elementos a e b de F.

M_7- Existência de um elemento absorvente. Existe um elemento $\Omega \in E$

20

tal que:

$$a \cdot \Omega = \Omega \cdot a = \Omega$$

qualquer que seja $a \in E$.

1º- Axiomas que relacionam a multiplicação com a adição.

MA_1- Lei distributiva da multiplicação em relação à adição.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c\ a.$$

MA_2- Lei de absorção da multiplicação em relação à adição.

$$a(a+b) = a$$

$$(a+b)a = a$$

AM_1-Lei distributiva da adição em relação à multiplicação.

$$a\ b + c = (a+c) \cdot (b+c)$$

$$c + a\ b = (c+a) \cdot (c+b)$$

AM_2-Lei de absorção da adição em relação à multiplicação.

$$a + a\ b = a$$

$$a\ b + a = a$$

§2- Álgebra dos Conjuntos Abstractos

11- Antes de indicarmos os espaços algébricos mais importantes, vamos abordar o estudo da Algebra dos conjuntos, estudo que servirá ao mesmo tempo de exemplificação das noções anteriormente defenidas. Seja E um conjunto abstracto dado. Os conjuntos A,B,.. que vamos considerar serão todos sub-conjuntos dum conjunto E, isto é vamos estudar o espaço $\mathcal{E}$ formado por todos os sub-conjuntos de E, incluindo o conjunto vazio O e o proprio conjunto E. O espaço $\mathcal{E}$ será um espaço algébrico quando se defenir em $\mathcal{E}$ uma operação que a cada par ordenado A,B de elemento de $\mathcal{E}$ faz corresponder um elemento de $\mathcal{E}$. A algebrização do espaço $\mathcal{E}$ pode fazer-se da seguinte maneira.

21

12-<u>Adição de Conjunto</u>. Dados dois sub-conjuntos A e B de E, consideremos o conjunto C dos elementos de E que pertencem pelo menos a um dos conjuntos A e B, diremos que C é a soma dos conjuntos A e B e escreveremos $C = A + B$.

É claro que C é um sub-conjunto de E e é portanto um elemnto de $\mathcal{E}$.

Nestas condições a defenição que acabamos de dar equivale a defenir uma operação algébrica no espaço $\mathcal{E}$, e é facil de verificar que esta operação gosa das seguintes propriedades.

A_1 -<u>Existência</u>. Dados dois elementos arbitrarios A e B de $\mathcal{E}$ (visto é: dois sub-conjuntos A e B de E) o elemento $C = A + B$ pertence a $\mathcal{E}$.

A_2 -<u>Unicidade</u>. Se $A = A_1$ e $B = B_1$ será $A + B = A_1 + B_1$

A_3 -<u>Lei associativa</u> $(A+B)+C = A+(B+C)$

A_4 -<u>Existência de um zéro</u>. Existe um elemento $O \in \mathcal{E}$ (a saber o conjunto vazio o) tal que $A + O = O + A = A$ qualquer que seja A.

A_6 - <u>Lei comutativa</u>. $A + B = B + A$

A_7 -<u>Existência de um elemento absorvente</u>. O elemento $E \in \mathcal{E}$ (isto é o conjunto E) é tal que $A + E = E + A = E$, visto que A é sempre um sub-conjunto de E.

Podiamos ainda indicar outras propriedddes da adição de conjuntos, por exemplo:

Se A é sub-conjunto de B será $A + B = B$, que como caso particular contém a seguinte propriedade da adição: $A + A = A$ qualquer que seja A

A demonstração desta propriedades faz-se mostrando que todo o elemento do conjunto que está escrito do lado esquerdo da fórmula é um elemento do conjunto que está escrito do lado direito e vice-versa.

Não nos interessa nêste momento explorar as consequências destas propriedades. O que pretendemos é pôr em evidência as propriedades que se seguem.

Em primeiro logar notemos que na defenição de soma de dois sub-conjuntos A e B de E, intervêm apenas funções proposicionais da lógica for-

22

mal e as noções primitivas da teoria dos conjuntos $a=b$ e $a\in E$; portanto a noção de soma de dois sub-conjuntos de E é uma noção da teoria dos conjuntos abstractos. Por outro lado consideremos uma transformação unívoca de E num outro conjunto E' $[f(E)=E']$,

Se fôr $A\subset E$ o conjunto A' dos transformados $a'=f(a)$ dos elementos $a\in A$ é um sub-conjunto de E'. Diremos que A' é a imagem de A relativamente à transformação f e escreveremos $A'=f(A)$ isto é ~~A~~ um elemento do conjunto $\mathcal{E}'$ formado por todos os sub-conjuntos de E';

isto é a transformação f define ao mesmo tempo uma transformação unívoca de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{E}'$ $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}'$. Se $f(E)=E'$ fôr uma transformação biunívoca $(E'\sim E)$: $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}'$ é ainda uma transformação biunívoca $(\mathcal{E}'\sim\mathcal{E})$.

Como $\mathcal{E}$ é um espaço algébrico, é natural verificar se $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}'$ é um homomorfismo. Se fôr $A\in\mathcal{E}$ e $B\in\mathcal{E}$ (isto é: $A\subset E$ e $B\subset E$) é facil de verif ficar que

$$f(A+B)=f(A)+f(B)$$

isto é a imagem duma soma é a soma das imagens das parcelas, e portanto f é um homomorfismo de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{E}'$, relativamente à adição defenida em $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$.

Se $f(E)=E'$ fôr uma equivalência $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}'$ é um isomorfismo relativamente à adição defenida em $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$.

Acabamos portanto de verificar que: Se E' fôr um conjunto qualquer equivalente a E $[E'=f(E)$ onde f é uma transformação biunívoca$]$ a defenição de adição de conjuntos anteriormente dada é tal que os espaços $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'=f(\mathcal{E})$ são isomorfos relativamente à adição, qualquer que seja a equivalência f.

Podemos ainda dizer que: tôda a equivalência entre dois conjuntos abstractos E e E' é ao mesmo tempo um isomorfismo relativamente à

23

adição dos sub-conjuntos de E e E', propriedade que é extremamente notável e que nos explica a razão pela qual a noção de soma de conjuntos desempenha um papel tão importante na teoria dos conjuntos abstractos. Nestas condições podemos dizer que as propriedades da adição de conjuntos se manteem quando se passa de um conjunto E para outro E' que lhe seja equivalente.

A noção de soma estende-se sem dificuldade a uma família de conjuntos $\mathcal{F}(A)$. Dá-se o nome de soma dos conjuntos da família $\mathcal{F}(A)$, (e representa-se pela notação $\sum_{\mathcal{F}} A$) ao conjunto S dos elementos que pertencem a um pelo menos dos conjuntos da família $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ for formada por uma infinidade numerável de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ a sua soma costuma representar-se pela notação

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$$

Se f transforma E em $E' = f(E)$, a cada $A \subset E$ correspondem um $A' = f(A) \subset E'$ e portanto à família $\mathcal{F}(A)$ corresponde uma família $\mathcal{F}'(A')$ de sub conjuntos de E', escreveremos então $\mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$.

Nestas condições era ainda fácil de verificar que

$$f\left(\sum_{\mathcal{F}} A\right) = \sum_{\mathcal{F}'} f(A)$$

isto é: a imagem duma soma é ainda a soma das imagens.

13 6 Intersepção de conjuntos.

Vamos agora definir uma nova operação no espaço algébrico $\mathcal{E}$, a que daremos o nome de intersepção e que representaremos pelo símbolo $\wedge$.

Sejam A e B dois sub-conjuntos dados de E, isto é: $A \in \mathcal{E}$ e $B \in \mathcal{E}$. Ao conjunto C dos elementos que pertencem simultâneamente a A e a B dá-se o nome de intersepção dos conjuntos A e B, o que representaremos pela notação $C = A \wedge B$. É claro que sendo C um sub-conjunto de E, C é um elemento de $\mathcal{E}$.

Nestas condições a definição que acabamos de dar equivale a definir uma operação algébrica no espaço $\mathcal{E}$, e é fácil de verifi-

24

car que esta operação goza das seguintes propriedades:

M_1 - Existência. Se $A \in \mathcal{E}$ e $B \in \mathcal{E}$, será $A \wedge B \in \mathcal{E}$

M_2 - Unicidade. Se $A = A_1$ e $B = B_1$ será $A \wedge B = A_1 \wedge B_1$

M_3 - Lei associativa. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

M_4 - Existência de uma unidade. O conjunto $E \in \mathcal{E}$ é tal que

$A \wedge E = E \wedge A = A$ qualquer que seja $A \in \mathcal{E}$.

M_6 - Lei comutativa. $A \wedge B = B \wedge A$

M_7 - Existência de um elemento absorvente. O conjunto vazio 0 é tal que $A \wedge 0 = 0 \wedge A = 0$

Estas propriedades são análogas às propriedades correspondentes da adição, note-se apenas que os papeis dos elementos E e O estão trocados. Seria ainda fácil de verificar que as propriedades análogas a MA_1, MA_2, AM_1 e AM_2 são verificadas, propriedades que relacionam a adição com a intercepção de conjuntos.

Destas propriedades podiam-se deduzir outras, assim por exemplo:

como $A \wedge (A + B) = A$

Se fizermos $B = 0$ vem

$A \wedge (A + 0) = A$

ou $A \wedge A = A$

Não nos interessa nêste momento explorar as consequências destas propriedades, pretendemos apenas pôr em evidência as ideias que se seguem.

A noção de intercepção de dois conjuntos é uma noção da teoria dos conjuntos abstratos porque ela se pode introduzir recorrendo apenas às noções primitivas da teoria dos conjuntos $a = b$ e $a \in E$ e às funções proposicionais da lógica formal.

Consideremos uma transformação de E em $E' = f(E)$; sejam $A' = f(A)$ e $B' = f(B)$. É evidente que se $A \subset B \rightarrow f(A) \subset f(B)$ isto é a i-

25

imagem de um sub-conjunto de um conjunto é um sub-conjunto da imagem dêsse sub-conjunto.

Como $A \wedge B$ é um sub-conjunto de A e de B será $f(A \wedge B)$ um sub-conjunto de f (A) e de f (B) e portanto $f(A \wedge B)$ está contido em $f(A) \wedge f(B)$,

$$f(A \wedge B) \subset f(A) \wedge f(B)$$

isto é: a imagem da intercepção de dois conjuntos está contida na intersepção das imagens. Não podemos portanto afirmar que uma transmação f unívoca de E em E' (que induz nos espaços $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ uma transformação f unívoca de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{E}'$) seja um homomorfismos do espaço algébrico $\mathcal{E}$ em $\mathcal{E}'$ em relação à operação de intersepção ($\wedge$).
[é o que acontece por exemplo se f transforma dois elementos diferentes $a \in E$ e $b \in E$ no mesmo elemento $c' \in E'$. Pondo $A = (a)$ e $B = (b)$ é evidente que $A \wedge B = 0$ e portanto $f(A \wedge B) = f(0) = 0$; por outro lado $f(A) \wedge f(B) = (c')$].

Teorema. Se f ~~xxxf~~ é uma equivalência entre E e E', a equivalência correspondente entre $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ é um isomorfismo em relação à intersecção de conjuntos, isto é:

$$f(A \wedge B) = f(A) \wedge f(B)$$

quaisquer que sejam os elementos A e B de $\mathcal{E}$.

Para demonstrar êste teorema, basta-nos mostrar que

$$f(A \wedge B) \supset f(A) \wedge f(B).$$

Temos portanto que provar que todo o elemento c' de $f(A) \wedge f(B)$ é um elemento de $f(A \wedge B)$. Seja $C = A \wedge B$, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ e $C' = A' \wedge B'$, a condição precedente escreve-se:

$$f(C) \supset C'$$

Se $c' \in C'$ será: $c' \in A'$ e $c' \in B'$, isto é: $c' \in f(A)$ e $c' \in f(B)$. Como f é uma correspondência biunívoca será $c' = f(c)$, onde c pertence a A e B e a $A \wedge B$, e portanto $c' = f(c)$ é elemento de $f(A \wedge B)$,

26

Seja $C = A \wedge B$, $A' = f\ (A)$, $B' = f\ (B)$ e $C' = A' \wedge B'$, a condição precedente escreve-se:

$$f\ (C) \supset C'$$

Se $\underline{c}' \in C'$ será: $\underline{c}' \in A'$ e $\underline{c}' \in B'$, isto é: $\underline{c}' \in f\ (A)$ e $\underline{c}' \in f\ (B)$. Como f é uma correspondência bionívoca será $\underline{c}' = f\ (\underline{c})$, onde $\underline{c}$ pertence a A a B e a $A \wedge B$, e portanto $\underline{c}' = f\ (c)$ é um elemento de $f\ (A \wedge B)$, como queriamos provar.

Podemos dizer que <u>toda a equivalência entre dois conjuntos abstratos E e E' é ao mesmo tempo um isomorfismo (relativamente à interseção dos sub-conjuntos) entre $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$.</u>

Podemos afirmar que as propriedades da intersecção de conjuntos se mantêm quando se passa de um conjunto abstrato E para outro E' que lhe seja equivalente.

A noção de intersecção de conjuntos estende-se sem dificuldade a uma família de conjuntos $\mathcal{F}$ (A). Dá-se o nome de intersecção dos conjuntos da família $\mathcal{F}$(A) (e representa-se pela notação $\prod_{\mathcal{F}} A$) ao conjunto I dos elementos comuns a todas os conjuntos da família $\mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ fôr formada por uma infinidade numerável de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a sua intersecção costuma representar-se pela notação:

$$I = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \ \ldots \wedge A_n \wedge \ldots .$$

Se f transforma E em $E' = f\ (E)$ a cada $A \subset E$ corresponde um $A' = f\ (A) \subset E'$ e portanto à família $\mathcal{F}$(A) corresponde uma família $\mathcal{F}'$(A') de sub-conjuntos de E'; escreveremos então $\mathcal{F}' = f\ (\mathcal{F})$.

Será fácil de verificar que

$$f\ (\prod_{\mathcal{F}} A) \subset \prod_{\mathcal{F}} f\ (A)$$

e que se f representa uma equivalência é ainda:

$$f\ (\prod_{\mathcal{F}} A) = \prod_{\mathcal{F}} f\ (A)$$

27

14 - Teorema fundamental sôbre a álgebra dos conjuntos abstratos.

Como tivemos ocasião de verificar, as noções de soma e de intersecção de conjuntos são noções da teoria dos conjuntos abstratos. Se considerarmos estas duas operações simultâneamente definidas num conjunto abstrato E, o espaço abstrato $\mathcal{E}$ (formado pelos sub-conjuntos de E) é um espaço algébrico no qual são definidas duas operações algébricas distintas $+$ e $\wedge$; para indicar êste facto escreveremos $\mathcal{E}(+,\wedge)$.

O teorema fundamental sôbre a álgebra dos conjuntos abstractos pode enunciar-se dizendo que se f fôr uma equivalência entre dois conjuntos abstratos E e E' , a equivalência correspondente entre os espaços algébricos $\mathcal{E}(+,\wedge)$ e $\mathcal{E}'(+,\wedge)$ é um isomorfismo relativamente às operações $+$ e $\wedge$.

Podemos ainda dizer que a algebrização dos conjuntos abstractos é feita de tal maneira que dois conjuntos abstractos equivalentes são sempre isomorfos. Era evidente, à priori, que uma álgebra dos conjuntos abstratos só poderia ser estudada na teoria dos conjuntos abstractos se satisfizesse a esta condição. A-pesar do caracter evidente destas observações , não temos conhecimento de que elas tivessem sido feitas.

28

15 - Subtração de conjuntos. Dá-se o nome de diferença de dois conjuntos A e B ao conjunto C dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, conjunto que se representa pela notação $C = A - B$. Esta operação goza das seguintes propriedades:

$$A - (B + C) = (A - B) - C$$
$$(A - B) \wedge C = A \wedge C - B \wedge C$$
$$(A + B) - C = (A - C) + (B - C)$$
$$A \wedge B - C = (A - C) \wedge (B - C)$$
$$(A - B) \wedge B = 0$$

Se A é um sub-conjunto de E, à diferença $E - A$ dá-se o nome de complementar de A relativamente a E (em notação $\mathcal{C}(A) = E - A$), e é evidente que

$$\mathcal{C}(A) \wedge A = 0$$
$$\mathcal{C}[\mathcal{C}(A)] = A$$
$$\mathcal{C}(A \wedge B) = \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$$
$$\mathcal{C}(A + B) = \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$$

Se f transforma E em $E' = f(E)$ e se A e B são sub-conjuntos de E tem-se

$$f(A - B) \supset f(A) - f(B)$$

isto é: a imagem duma diferença contém a diferença das imagens. Mas se f fôr uma equivalência, pode-se demonstrar que

$$f(A - B) = f(A) - f(B)$$

isto é: toda a equivalência é um isomorfismo em relação à subtração. Podiamos aqui fazer observações análogas às que fizemos a respeito da adição e da interseção. Estamos agora em condições de poder demonstrar o seguinte teorema.

16 - Teorema de Banach. Se a função φ transforma de uma maneira biunívoca o conjunto A num sub-conjunto de B e se a função ψ transforma de uma maneira biunívoca o conjunto B num sub-conjunto de A, existe

29

uma decomposição dos conjuntos A e B

$$A = A_1 + A_2 \qquad B = B_1 + B_2$$

satisfazendo às seguintes condições:

$$A_1 \wedge A_2 = 0 \qquad B_1 \wedge B_2 = 0$$

$$\varphi(A_1) = B_1 \quad \psi(B_2) = A_2$$

Isto é: os dois conjuntos A e B podem-se decompôr em duas partes disjuntas que são respectivamente equivalentes.

Se A' é um sub-conjunto de A, isto é: se

$$A' \subset A$$

Será

$$\varphi(A') \subset \varphi(A)$$

e $A' \sim \varphi(A')$

Do mesmo modo se vê que:

se

$$B' \subset B$$

Será

$$\psi(B') \subset \psi(B)$$

e $B' \sim \psi(B')$

Como $\varphi(A) \subset B$ será $\varphi(A') \subset B$ e

portanto $\psi[\varphi(A')] \subset \psi(B)$

$$\varphi(A') \sim \psi[\varphi(A')]$$

Como $A' \sim \varphi(A')$ e $\varphi(A') \sim \psi[\varphi(A')]$ será

$$A' \sim \psi[\varphi(A')]$$

Por outro lado, como $\psi(B) \subset A$ será $\psi(B') \subset A$ se $B' \subset B$ e portanto como $\varphi(A') \subset B$ será $\psi[\varphi(A')] \subset A$. Ponhamos:

$$\Phi(A') = \psi[\varphi(A')]$$

Φ é definida sobre todos os sub-conjuntos de A e transforma $A' \subset A$ num sub-conjunto $\Phi(A')$ de A, que é equivalente a A. Em resumo, se $A' \subset A$ será

$$\Phi(A') \subset A \quad \text{e} \quad A' \sim \Phi(A')$$

Podemos portanto afirmar que

30

$$\Phi^2(A') = \Phi[\Phi(A')] \subset A$$

e

$$\Phi^2(A') \sim \Phi(A') \sim A'$$

Duma maneira geral:

$$\Phi^n(A') = \Phi[\Phi^{n-1}(A')] \subset A$$

e

$$\Phi^n(A') \sim A'$$

Seria ainda fácil de verificar que

$$A \supset \Phi(A) \supset \Phi^2(A) \supset \Phi^3(A) \supset \dots \supset \Phi^n(A) \supset \dots$$

Ponhamos

$$(1) \qquad \boxed{R = A - \psi(B)}$$

será

$$R \wedge \psi(B) = 0$$

Como $R \subset A$ será $\Phi^n(R) \subset A$ e portanto o conjunto

$$(2) \qquad A_1 = R + \Phi(R) + \Phi^2(R) + \Phi^3(R) + \dots + \Phi^n(R) + \dots$$

é um sub-conjunto de A. Seria ainda fácil de vêr que $\Phi^i(R) \wedge \Phi^j(R) = 0$ se $i \neq j$ (supômos que $\Phi^0(R) = R$). Ponhamos agora:

$$A_2 = A - A_1$$

será

$$(3) \qquad \boxed{A = A_1 + A_2} \quad e \quad \boxed{A_1 \wedge A_2 = 0}$$

Seja

$$(4) \qquad B_1 = \varphi(A_1)$$

e

$$B_2 = B - B_1$$

isto é

$$(5) \qquad \boxed{B = B_1 + B_2} \quad e \quad \boxed{B_1 \wedge B_2 = 0}$$

É evidente que

$$B_1 = \varphi(A_1) \subset \varphi(A) \subset B$$

isto é

31

$B_1 \subset B.$

Resta-nos agora provar que

(6) $$\boxed{\psi(B_2) = A}$$

Para isso notemos que, sendo Φ uma equivalência, será em virtude de (2):

$$\Phi(A_1) = \Phi(R) + \Phi^2(R) + \cdots + \Phi(R) + \cdots$$

portanto

(7) $$\boxed{A_1 = R + \Phi(A_1)}$$

onde $$R \wedge \Phi(A_1) = 0$$

Como ψ é uma equivalência será:

$$\psi(B_2) = \psi(B - B_1) = \psi(B) - \psi(B_1)$$

Ora em virtude de (1) será

(8) $$\psi(B) = A - R$$

e

(9) $$\psi(B_1) = \psi\left[\varphi(A_1)\right] = \Phi(A_1)$$

Substituindo na expressão precedente, (8) (9) e (7) tem-se:

$$\psi(B_2) = (A-R) - \Phi(A_1) = A - \left[R + \Phi(A_1)\right] =$$
$$= A - A_1 = A_2$$

Como queriamos mostrar.

Este teorema foi demonstrado por Banach [1], (sobre a demonstração que indicamos veja-se Sierpinski([1] pag. 90.)

Banach tirou dêste teorema as seguintes consequências muito importantes [loc. cit.]

17- Definição. Dizemos que a relação R possui a propriedade (α) quando:

1º) a relação R só pode ter logar entre conjuntos

2º) a condição A R B (leia-se entre os dois conjuntos A e B existe a relação R) implica a existência de uma função φ, que transforma de uma maneira biunívoca A em $B = \varphi(A)$ de tal maneira que $A' \, R \, \varphi(A')$ qualquer que seja o sub-conjunto $A' \subset A$.

Do teorema de Banach deduz-se imediatamente o seguinte corolario:

Corolario 1. Se a relação R possui a propriedade (α) e se fôr

$$A_1 \subset A \qquad B_1 \subset B$$

$$A \, R \, B_1 \quad \text{e} \quad A_1 \, R \, B$$

podem-se decompor os conjuntos A e B em dois sub-conjuntos disjuntos:

$$A = A_1 + A_2 \qquad A_1 \wedge A_2 = 0$$

$$B = B_1 + B_2 \qquad B_1 \wedge B_2 = 0$$

tais que: $\quad A_1 \, R \, B_1 \quad \text{e} \quad A_2 \, R \, B_2$

Teremos ocasião de indicar uma aplicação dêste teorema ao caso em que a relação R é a relação de homeomorfismo entre conjuntos de pontos situados num espaço topològico.

Definição. Diremos que a relação R possui a propriedade (β) se:

1º) a relação R só pode ter logar entre conjuntos.

2º) as condições: $A_1 \, R \, B_1$, $A_2 \, R \, B_2$ e $A_1 \wedge A_2 = 0$, $B_1 \wedge B_2 = 0$ implicam que:

$$(A_1 + A_2) \, R \, (B_1 + B_2)$$

Do teorema de Banach deduz-se imediatamente o seguinte corolario:

Corolario 2. Se a relação R possui as propriedades (α) e (β) e se fôr:

$$A_1 \subset A \qquad B_1 \subset B$$

$$A \, R \, B_1 \quad \text{e} \quad A_1 \, R \, B$$

será $\quad A \, R \, B$

Aplicando esta proposição à relação de equivalência [redacted] entre dois conjuntos, obtem-se imediatamente o

Teorema de Schröder-Cantor-Bernstein: se o conjunto A é equivalente a um sub-conjunto de B e se B é equivalente a um sub-conjunto de A, os conjuntos A e B são equivalentes,

visto que a relação de equivalência gosa das propriedades (α) e (β).

35

§ 3- Sistemas com multiplicação

17- Definição. Diz-se que E (.) é um sistema com multiplicação se forem verificados os axiomas M_1, M_2, M_3, M'_4 e M''_4 .

Vamos mostrar que os sistemas com multiplicação gosam das seguintes propriedades.

Teorema 1- Toda a unidade à esquerda é igual á unidade á direita. Com efeito fazendo $a = e''$ no axioma M'_4 e $a = e'$ no axioma M''_4 , tem-se respectivamente $e'.e'' = e''$, $e'.e'' = e'$ e portanto $e' = e''$ o que demonstra o teorema.

Corolario. A unidade à direita e à esquerda são únicas.

Com efeito se existirem duas unidades à esquerda (por exemplo) e'_1 e e'_2 seria $e'_1 = e''$ e $e'_2 = e''$ e portanto $e'_1 = e'_2$. Daqui resulta que na definição de sistema com multiplicação se podem substituir os axiomas M'_4 e M''_4 pelo axioma M_4

18- Inversos à direita e à esquerda. Diremos que $a \in E$ tem um inverso à direita se existe um elemento $a_d^{-1} \in E$ tal que $a.\ a_d^{-1} = e$. Do mesmo modo diremos que $a \in E$ tem um inverso à esquerda se existe um elemento $a_e^{-1} \in E$ tal que $a_e^{-1}.\ a = e$.

Teorema 2 - Se $a \in E$ tem um inverso dos dois lados, êsses dois inversos são iguais e únicos. Com efeito: se multiplicarmos à direita a igualdade $a_e^{-1}.\ a = e$ por a_d^{-1} vem

$(a_e^{-1}.\ a).\ a_d^{-1} = e.\ a_d^{-1}$, ou $a_e^{-1}.\ (a.\ a_d^{-1}) = a_d^{-1}$, ou $a_e^{-1}.\ e = a_d^{-1}$

ou finalmente $a_e^{-1} = a_d^{-1}$; o que demonstra que um inverso à esquerda é sempre um inverso à direita (se êste existir) e que êstes dois inversos são iguais. Daqui resulta a unicidade do inverso.

Nestas condições diremos que a tem um inverso bilateral, ou mais simplesmente que a tem um inverso, que representaremos pela nota-

34

ção a^{-1}, e então teremos: $a\,a^{-1} = a^{-1}\,a = e$. Em E há sempre pelo menos um elemento que tem um inverso bilateral a saber o elemento <u>e</u>, mas a existência de um inverso à esquerda não implica sempre a existência de um inverso à direita e vice-versa.

Podemos a êste respeito demonstrar a seguinte proposição.

<u>Teorema 3</u>. <u>Se $a \in E$ tem um inverso à direita</u> a_d^{-1}, <u>que tem por sua vez um inverso à direita $(a_d^{-1})_d^{-1}$ então a tem tambem um inverso à esquerda</u>. Com efeito, por hipótese:

$$a\,a_d^{-1} = e$$
$$(a_d^{-1})\,(a_d^{-1})_d^{-1} = e$$

Esta última igualdade pode escrever-se:

$$a_d^{-1} \cdot e \cdot (a_d^{-1})_d^{-1} = e$$

ou
$$a_d^{-1} \cdot (a \cdot a_d^{-1}) \cdot (a_d^{-1})_d^{-1} = e$$
$$(a_d^{-1} \cdot a) \cdot \left[a_d^{-1} \cdot (a_d^{-1})_d^{-1}\right] = e$$
$$(a_d^{-1} \cdot a) \cdot e = e$$
$$a_d^{-1} \cdot a = e$$

o que mostra que a_d^{-1} é um inverso à esquerda de <u>a</u>. Será fácil de ver que se a e b têm um inverso à direita a . b também tem um inverso à direita que é: $(a\,b)_d^{-1} = b_d^{-1} \cdot a_d^{-1}$. Do mêsmo modo se via que se a_e^{-1} e b_e^{-1} existem será: $(a\,b)_e^{-1} = b_e^{-1} \cdot a_e^{-1}$

19 - <u>Sub-espaço algébrico</u>. Para que $E' \subset E$ seja um sub-espaço algébrico de E, isto é, para que E' seja um sistema com multiplicação, é necessário e suficiente que: 1º) <u>a. b</u> $\in E'$ se $a \in E'$ e $b \in E'$, 2º) que <u>e</u> $\in E'$. Pode acontecer que a multiplicação seja comutativa em E' sem que o seja em E. É o que acontece com o sub-espaço algébrico formado pela unidade.

20 - <u>Potências</u>. Por definição a^n, onde <u>n</u> é um inteiro positivo, é um produto de factores todos iguais a n. É fácil de verificar que:

1º) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2º) $(a^m)^n = a^{mn}$. Se <u>a</u> tiver um inverso ponhamos por definição $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ e convencionaremos que $a^0 = e$,

35

então as regras de cálculo 1ª) e 2ª) são válidas para expoentes inteiros, positivos, negativos ou nulos.

21 - Exemplos. 1º) Seja E um conjunto abstrato e seja $T(a)$ uma transformação unívoca defenida em E e cujo contra-domínio é um sub-conjunto de E . O conjunto de todas as transformações T formam um sistema com multiplicação quando se define a igualdade de duas transformações $T_1(a)$ e $T_2(a)$ (em símbolos $T_1 = T_2$) pela condição: $T_1(a) = T_2(a)$ quàlquer que seja $a \in E$, e produto $(T = T_1 \cdot T_2)$ de duas transformações T_1 e T_2 como sendo a transformaçao

$$T(a) = T_1\left[T_2(a)\right]$$

A demonstração é imediata em particular a transformação unidade U(isto é tal que $TU = UT = T$, qualquer que seja T) é a tranformação identidade, isto é: aquela que não altera os elementos de E. $[U(a) = a$ para qualquer $a \in E]$.

36

§ 4 - A Noção de Grupo

22 - **Definição**. Dado um espaço algébrico $\mathcal{G}$ (.) diremos que ela forma um grupo se forem verificados os axiomas M_1, M_2, M_3, M'_4 e M'_5 (ou então os axiomas M_1, M_2, M_3, M''_4 e M''_5). É facil de demonstrar que estes axiomas são equivalentes aos axiomas M_1, M_2, M_3; M_4, M_5. Também se demonstra que a unidade e é unica bem como o inverso a^{-1} de cada elemento $a \in E$.

Da igualdade $a\,x = a\,y$ resulta imediatamente que $x = y$; basta multiplicar à esquerda ambos os membros da igualdade precedente por a^{-1}.

Do mesmo modo se demontra que de $xa = xy$ resulta $x = y$.

As equações $ax = b$ e $y\,a = b$ têm uma única resolução a saber $x = a^{-1}b$ e $y = b\,a^{-1}$.

Diz-se que $\mathcal{G}$ é abeliano se fôr $a\,b = b\,a$ qualquer que sejam a e b de $\mathcal{G}$.

23- **Sub-grupos** Diremos que $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ é um sub-grupo de $\mathcal{G}$ se $\mathcal{G}'$ fôr um grupo em relação á operação definida em $\mathcal{G}$; para que assim seja é necessario e suficiente que: 1º) $a\,b \in \mathcal{G}'$ se $a \in \mathcal{G}'$ e $b \in \mathcal{G}'$ 2º) $a^{-1} \in \mathcal{G}'$ se $a \in \mathcal{G}'$.

Um sub-conjunto $\mathcal{G}'$ pode ser abeliano sem que $\mathcal{G}$ o seja; é o que acontece com o sub-grupo formado pelo elemento unidade.

24- **Exemplo de grupos:** I-Seja E um conjunto abstracto qualquer e consideremos o conjunto de todas as transformações T biunívocas de conjunto E em si proprio. Como vimos no parágrafo anterior o conjunto de todas as transformações T forma um sistema com multiplicação quando se define a igualdade e o produto de duas transformações da maneira indicada. Para mostrar que elas formam um grupo basta mostrar que a cada transformação T corresponde uma transformação T^{-1} tal que $T\,T^{-1} = U$. Com efeito, seja: $a' = T(a)$. Como T é uma transformação biunívoca será $a = \mathcal{S}(a')$

37

tal que: $a = S[T(a)] = S\ T\ (a)$ e portanto $S\ T = U$ c.q.d.

Seria ainda facil de vêr que o conjunto de todas as transformações de um conjunto E num outro equivalente formam um grupo a que se dá o nome de grupo das equivalencias que é o grupo fundamental da teoria dos conjuntos abs~~t~~tractos. Vemos assim mais uma vez que na teoria dos conjuntos abstractos se é levado a introdusir noções de álgebra.

II-Seja E um espaço algébrico qualquer e consideremos o conjunto de todas as transformações isomorfas de E em si proprio. O conjunto de todos êstes isomorfismos formam um grupo se defenirmos igualdade e produto de dois isomorfismos duma maneira análoga á anterior.

Dum mesmo modo se vê que o conjunto de todos os isomorfismos de um espaço algébrico formam um grupo a que se dá o nome de grupo dos isomorfismos que é o grupo fundamental da Álgebra abstracta.

Dois espaços algébricos isomorfos são sempre equivalentes mas a recíproca não é verdadeira e portanto o grupo dos isomorfismos associados a um espaço algébrico dado é um sub-grupo do grupo das equivalências associadas do mesmo espaço. Podemos portanto considerar a álgebra abstracta como subordinada lógicamente à teoria dos conjuntos abstractos

III- O conjunto dos elementos de um sistema com multiplicação que têm um inverso formam evidentemente um grupo em relação à multiplicação.

§5-Algebrização do espaço dos sub-grupos de um grupo dado.

25- Multiplicação de sub-grupos. A algebrização dos sub-grupos de um grupo dado desempenha um papel tão importante na teoria dos grupos como a algebrização dos sub-conjuntos de um conjunto dado.

Sejam $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ dois sub-grupos de $\mathcal{G}$, utilizaremos a notação $\mathcal{G}_1 \cdot \mathcal{G}_2$ para representar o conjunto dos elementos $(a_1 \cdot a_2)$ onde $a_1 \in \mathcal{G}_1$ e $a_2 \in \mathcal{G}_2$:

É claro que

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \supset \mathcal{G}_2$$

visto que $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ contêm a unidade.

Se $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ será $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2$ exactamente como acontecia na adição de conjuntos. Por outro lado $\mathcal{G}_1 \mathcal{G} = \mathcal{G}$ qualquer que seja $\mathcal{G}_1$ ($\mathcal{G}$ é um elemento absorvente). No caso geral $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2$ contêm elementos que não pertencem a $\mathcal{G}_1$ nem a $\mathcal{G}_2$.

O grupo formado pelo elemento unidade é tal que $\mathcal{G}_1 = e\, \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1 e$, qualquer que seja $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$, e portanto <u>e</u> desempenha o papel de uma unidade.

Diremos que $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2$ é o produto dos sub-grupos $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ (considerados nesta ordem). Aqui aparece uma dificuldade muito importante; o produto de dois sub-grupos de $\mathcal{G}$ não é em geral um sub-grupo de $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \neq \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1$.

É esta a razão pela qual esta operação desempenha um papel pouco importante na teoria dos grupos, o mesmo não acontece na teoria dos grupos abelianos como veremos. A noção de produto directo de dois sub-grupos que estudamos mais adiante resolve precisamente uma parte dessas dificuldades.

~~O que~~ Seria importante ~~era~~ algebrizar o espaço dos sub-grupos de $\mathcal{G}$ por uma operação que gozasse das mesmas propriedades que a adição dos sub-conjuntos de um conjunto dado.

Ora uma tal algebrização não é possivel em geral pela operação que aca-

39

bamos de indicar e não conhecemos nenhuma algebrização dessa natureza

26-<u>Intersepção de ~~xxxxxxxxxxxxx~~ sub-grupos</u>. Se $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são dois sub-grupos de $\mathcal{G}$ daremos o nome de intersecção de $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ ao conjunto $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$ dos elementos que pertencem simultâneamente a $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$. Vamos mostrar que $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$ é um sub-grupo de $\mathcal{G}$. Com efeito se <u>a</u> e <u>b</u> são elementos de $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$ será

$$a \in \mathcal{G}_1 \qquad a \in \mathcal{G}_2$$
$$b \in \mathcal{G}_1 \qquad b \in \mathcal{G}_2$$

e portanto

$$a\,b \in \mathcal{G}_1 \qquad a\,b \in \mathcal{G}_2$$

isto é $a\,b \in \mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$ Por outro lado se a é um elemento de $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$ será $a \in \mathcal{G}_1$ e $a \in \mathcal{G}_2$ e portanto $a^{-1} \in \mathcal{G}_1$ e $a^{-1} \in \mathcal{G}_2$ isto é $a^{-1} \in \mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$.

A unidade é um elemento de $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$ e portanto $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$ é ainda um sub-grupo $\mathcal{G}_3 \subset \mathcal{G}$, então escreveremos

$$\mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$$

Será facil de verificar que esta operação gosa das seguintes propriedades em tudo análogas às propriedades que indicámos para a intersecção dos sub-conjuntos de um conjunto dado.

M_1- <u>Existência</u> $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$ é um sub-grupo de $\mathcal{G}$.

M_2- <u>Unicidade</u>. Se $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1'$ e $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2'$ é $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1' \wedge \mathcal{G}_2'$

M_3- <u>Lei associativa</u>. $(\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2) \wedge \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_1 \wedge (\mathcal{G}_2 \wedge \mathcal{G}_3)$

M_4- <u>Existência de uma unidade</u>. O sub-grupo $\mathcal{G}$ é tal que

$$E \wedge \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1 \wedge E = \mathcal{G}_1$$

qualquer que seja o sub-grupo $\mathcal{G}_1$

M_6-<u>Lei comutativa</u>. $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2 \wedge \mathcal{G}_1$

M_7- <u>Existencia de um elemento absorvente</u>. O sub-grupo E formado pelo elemento unidade <u>e</u> é tal que $E \wedge \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1 \wedge E = E$ qualquer que seja o sub- grupo $\mathcal{G}_1$

A unidade desempenha aqui o papel do conjunto vazio.

Consideremos o conjunto $\mathcal{H}$ dos sub-grupos de um grupo $\mathcal{G}$; $\mathcal{H}$ será um

40

espaço algébrico em relação á operação de interseção de sub-grupos de $\mathcal{G}$ que acabamos de definir. Se $\mathcal{G}'$ é um grupo isomorfo a $\mathcal{G}$ o espaço algébrico correspondente $\mathcal{H}'$ será isomorfo a $\mathcal{H}$ em relação á operação de interseção. A operação de interseção é invariante por isomorfismo.

27- <u>Produtos Directos</u>. Diremos que o grupo $\mathcal{C}$ é o produto directo dos grupos A e B se fôrem verificadas as seguintes condições:

1º) Todo o elemento $\underline{c}$ de $\mathcal{C}$ é o produto de um elemento $\underline{a}$ de A por um elemento $\underline{b}$ de B, isto é $\underline{c} = \underline{a}\ \underline{b}$, e reciprocamente $\mathcal{C} = A\,B$

2º) A decomposição a que se refere o número precedente é única isto é: se $a\,b = a'b'$ será $\underline{a} = \underline{a}'$ e $\underline{b} = \underline{b}'$

3º) os elementos de A são permutáveis com os elementos de B, isto é $\underline{a}\ \underline{b} = \underline{b}\ \underline{a}$ quaisquer que sejam $a \in A$ e $b \in B$.

Para indicar que $\mathcal{C}$ é o produto directo de A e B escreveremos:

$$C = A \times B$$

É evidente que nestas condições 1º) o produto de todos os elementos de A pelos elementos de B é o grupo C. 2º) os grupos A e B só podem têr como unico elemento comum a unidade $\underline{e}$.

Com efeito se $\underline{a}$ fôsse comum a A e B nos poderiamos escrever $\underline{a} = \underline{a}\ \underline{e}$ e $\underline{a} = \underline{e}\ \underline{a}$ e portanto $\underline{e} = \underline{a}$ c. q. d.

A noção de produto directo pode generalizar-se ao caso de vários factores. Diremos que A é o produto directo dos sub-grupos $A_1, A_2 \ldots A_n$ se forem verificadas as seguintes condições:

1º) Todo o elemento $\underline{a}$ de A é o produto de n factores $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, a_n$ que pertencem respectivamente a $A_1, A_2, \ldots, A_n$

2º) A decomposição a que se refere o número precedente é única, isto é: se $\underline{a} = \underline{a}_1 . \underline{a}_2 \ldots, a_n$ e $\underline{a} = \underline{a}'_1 . \underline{a}'_2 \ldots a_n$ será $a'_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

3º) Todos os elementos $a_i \in A_i$ são permutaveis com todos os elementos $a_j \in A_j$ (se $i \neq j$)

Para indicar que A é o produto directo de A_1, A_2, ..., An escreveremos

41

$A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times An.$

28-Propriedades do produto directo. O produto directo goza das seguintes propriedades análogas às propriedades da adição dos sub-conjuntos de um conjunto dado.

A_2 - Unicidade. Se $A = A_1$ e $B = B_1$ será : $A \times A_1 = B \times B_1$

A_3 - Lei associativa. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

A_4 - Existência de uma unidade. Existe um sub-grupo de $\mathcal{G}$, a saber o grupo formado pelo elemento unidade e, tal que $e \times A = A \times e = A$ qualquer que seja o sub-grupo A .

A_6 - Lei comutativa. $A \times B = B \times A$

É fácil de vêr que as propriedades A_1 e A_7 não são verificadas:

Teorema: Se o grupo $\mathcal{G}$ é o produto directo de dois sub-grupos A e B respectivamente isomorfos a dois sub-grupos A' e B' dum grupo $\mathcal{G}_1$, o grupo $\mathcal{G}_1$ admite um sub-grupo $\mathcal{G}'$ isomorfo a $\mathcal{G}$ e que é o produto directo de A' e B' . Isto é : se $A \cong A'$ e $B \cong B'$ será $A \times B \cong A' \times B'$:

Vamos agora abordar o estudo das relações entre o produto directo e a intersepção dos sub-grupos de $\mathcal{G}$: Em primeiro logar consideremos a lei

M A_1- Lei distributiva da intersepção em relação ao produto directo de sub-grupos.

$$A \wedge (B \times C) = (A \wedge B) \times (A \wedge C)$$

$$(B \times C) \wedge A = (B \wedge A) \times (C \wedge A)$$

Será esta lei verdadeira ? Se a primeira fôr verdadeira, é evidente que a segunda o será em virtude da propriedade comutativa do produto directo e da intersepção de sub-grupos . Para estudarmos esta lei, vamos considerar dois casos:

1º caso. O sub-grupo A contem o sub-grupo $B \times C$. Isto é

$$A \supset B \times C$$

então será

$$A \wedge (B \times C) = B \times C$$

42

$$A \wedge (B \times C) = B \times C$$

$$A \wedge B = B$$

$$A \wedge C = C$$

visto que: A, contendo $B \times C$ contém o sub-grupo B e C. A lei em questão pode portanto, neste caso escréver-se:

$$B \times C = B \times C$$

relação que é evidentemente verificada.

2º caso. O sub-grupo A será contido em $B \times C$.
então teremos

$$A \wedge (B \times C) = A$$

e portanto a lei M A, escreve-se sob a forma

$$A = (A \wedge B) \times (A \wedge C)$$

É facil encontrar exemplos que nos mostram que esta igualdade nem sempre é verificada. Em todo o caso se A contem um dos sub-grupos B e C esta igualdade é verificada e pode escrever-se por exemplo no caso em que $A > B$ (caso em que $A \wedge B = B$):

$$\boxed{A = B \times (A \wedge C)}$$

Para a demonstração deste teorema veja-se: Van der Waerden (1). vol.1 p. 143.

29- Grupos decomponiveis. Diremos que um grupo $\mathcal{G}$ é decomponivel quando sendo dado um sub-grupo qualquer $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ existe um sub-grupo $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}$ tal que:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$$

Teorema 1- Todo o sub-grupo $\mathcal{G}_1$ de um grupo $\mathcal{G}$ decomponivel é um grupo ~~perfeitamente~~ decomponivel.

Seja $\mathcal{G}_1$ um sub-grupo qualquer de $\mathcal{G}$. Seja $\mathcal{G}'$ um sub-grupo qualquer de $\mathcal{G}_1$, então existe $\mathcal{G}''$ tal que:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$$

Como $\mathcal{G}_1$ contem $\mathcal{G}'$ será:

43

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}' \times (\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}'')$$

Ora $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}'' = \mathcal{G}_1'$ é um sub-grupo de $\mathcal{G}_1$ e portamto existe $\acute{\mathcal{G}_1}$ tal que:

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}' \times \mathcal{G}_1'$$

Como queriamos mostrar.

Teorema 2. Todo o espaço algébrico isomorfo a um grupo decomponivel é um grupo decomponivel.

Esta propriedade resulta imediatamente de teoremas anteriormente demonstrados

30- Automorfismos interiores. Dá-se o nome de automorfismo interior de um grupo $\mathcal{G}$ ao automorfismo definido pela transformação.

$$f(a) = s^{-1} a\ s = a'$$

onde s é um elemento fixo de $\mathcal{G}$ e a um elemento arbitrario. Trata-se evidentemente de um automorfismo visto que :

$$f(a\ b) = s^{-1} a\ \ s = s^{-1} a\ s.\ s^{-1} a\ s = f(a).f(b)$$

O conjunto dos automorfismos interiores formam evidentemente um grupo em relação à multiplicação dos automorfismos.

44

§ 6- Grupos Abelianos.

31- Defenição. Se num grupo G, a multiplicação for comutativa ($ab = ba$) o grupo diz-se abeliano. Dá-se também o nome de módulo aos grupos abelianos. Usaremos a notação aditiva (+) para representar a operação correspondente, a que damos o nome de adição. Um grupo abeliano verifica portanto os axiomas: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 do nº 8

32- Algebra dos sub-grupos de G. Dados dois sub-grupos G_1 e G_2 de G daremos o nome de soma de G_1 e G_2 ao conjunto G_3 de todos os elementos da forma:

$$a_3 = a_1 + a_2$$

onde $a_1 \in G_1$ e $a_2 \in G_2$, conjunto que representaremos pela notação

$$G_3 = G_1 \dot{+} G_2$$

Teorema. A soma de dois sub-grupos de um grupo abeliano G é um sub-grupo de G. Representaremos por Θ o sub-grupo nulo formado pelo elemento θ, e por $(-G_1)$ a que chamaremos grupo simétrico de G_1. Conjunto dos elementos $(-a_1)$ onde $a_1 \in G_1$.

É claro que $(-G_1) = G_1$ e portanto:

$$(-G_1) \dot{+} G_1 = G_1 \dot{+} G_1 = G_1$$

e portanto o conjunto $\mathcal{G}$ dos sub-grupos de G não formam um grupo abelian em relação á adição. O único axioma que não é verificado é o axioma da existência de um simétrico. A algebrização dos sub-grupos de G que acabamos de fazer não transforma $\mathcal{G}$ num grupo abeliano, mas em todo o caso temos já mais propriedades que no caso dos grupos não abelianos. A intersecção de sub-grupos define-se como no parágrafo precedente e goza das mesmas propriedades. A intersecção de dois grupos abelianos é um grupo abeliano.

33- Soma directa de sub-grupos de G. A defenição é análoga á que demos para o produto directo. Para indicar que G é a soma directa de G_1 e G_2 escreveremos

$$G = G_1 \dot{\oplus} G_2$$

ou

$$G_2 = G \ominus G_1$$
$$G_1 = G \ominus G_2$$

49

Podemos interpretar o símbolo $A \ominus B$ como uma subtracção desde que B seja um sub-grupo de A e que A seja decomponivel, então o símbolo indicado tem sentido qualquer que seja o sub-grupo B de A.

A soma directa gosa de todas as propriedades do produto direcção.

Sob certo aspecto podmos considerar $\oplus$ e $\ominus$ como operações inversas visto que:

$$G = G_1 \oplus (G \ominus G_1)$$
$$G \ominus (G \ominus G_1) = G_1$$

estas fórmulas são sempre exactas se G fôr decomponivel e G_1 um sub-grupo qualquer de G.

Notemos ainda que

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$$

é verificada se fôr: B um sub-grupo de A e C um sub-grupo de $A \ominus B$

Com efeito: ponhamos:

$$(1) \quad A \ominus B = B_1$$

donde

$$(2) \quad A = B \oplus B_1$$

Como C é um sub-grupo de B_1 ponhamos

$$(3) \quad B_1 \ominus C = C_1$$

donde

$$(4) \quad B_1 = C_1 \oplus C$$

Substituindo em (2) vem:

$$A = B \oplus (C_1 \oplus C) =$$
$$= B \oplus (C \oplus C_1) =$$
$$= (B \oplus C) \oplus C_1$$

donde

$$(5) \quad C_1 = A \ominus (B \oplus C)$$

Atendendo a (1) e (2) tem-se

$$(6) \quad C_1 = B_1 \ominus C = (A \ominus B) \ominus C$$

comparando (5) e (6) vê-se imediatamente que o resultado anunciado é

46

verdadeiro, resultado que utilisaremos no capítulo IV.

Indiquemos algumas razões que nos mostrem a importância da noção de soma directa. Em primeiro logar não podemos falar da soma directa de dois sub-grupos quaisquer de G, trata-se portanto de uma operação que só é definida para certos pares de elementos de $\mathcal{G}$ (conjunto dos sub-grupos de G), emquanto que a adição de sub-grupos era definida em todo o espaço $\mathcal{G}$. O axioma A_1 não é portanto verificado. Por outro lado a soma directa goza de todas as propriedades da soma.

Parece portanto que nada ganhámos com a introdução desta noção.

Mas não é assim visto que se pode definir uma operação inversa da soma directa, relativamente ao elemento absorvente G, para todos os grupos abelianos decomponiveis, visto que dado G_1 existe $G_2 = G \ominus G_1$ tal que

$$G = G_1 \oplus G_2$$

o que é evidentemente importante.

<u>34-Álgebra das transformações definidas em G.</u> Seja $\mathfrak{T}$ o conjunto das transformações $y = f(x)$ definidas em G e cujo contra-dominio pertence a G. Se definirmos <u>a soma de duas transformações</u> $F_1(x)$ e $F_2(x)$ como sendo a transformação $F(x)$, tal que

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

(então escreveremos $F = F_1 + F_2$) <u>o espaço $\mathfrak{T}$ é um grupo abeliano em relação á operação que acaba de ser definida.</u>

Note-se que: o zéro de $\mathfrak{T}$ é a transformação O definida por:

$$\theta = O(x)$$

qualquer que seja x de $\mathfrak{T}$, e que a transformação ~~definida por~~ simétrica de $F(x)$ é a transformação $H(x)$ definida por

$$H(x) = -[F(x)]$$

Para representar H usaremos a notação $(-F)$.

Teremos ocasião de completar a álgebra de $\mathfrak{T}$, pela introdução de uma nova operação, no § consagrado á teoria dos anéis.

47

Nada mais diremos sobre os grupos abelianos porque não teremos a utilizar outros resultados.

Para terminar limitamo-nos a indicar o seguinte resultado de Mazur e Ulam. Existe um grupo abeliano numerável universal. (veja nº6), isto é um grupo abeliano numerável U tal que todo e qualquer grupo abeliano numerável é isomorfo a um sub-grupo de U. Êste resultado é devido a Mazur e Ulam. [1].

36- Transformações aditivas. Diremos que uma trnasformação T definida em G e cujo contra-dominio Δ pertence a G é uma transformação aditiva se:

$$(1) \qquad T(a+b) = T(a) + T(b)$$

quaisquer que sejam a e b de G. Como T respeita a lei de composição definida em G, T define um homomorfismo de G em Δ, que é um sub-grupo de G. Para demonstrar que Δ é um grupo abeliano, basta mostrar que Δ é um grupo e portanto que: 1º) se $a' \in \Delta$ e $b' \in \Delta$ é: $a'+b' \in \Delta$ 2º) $\theta \in \Delta$ 3º) se $a' \in \Delta$ será $(-a') \in \Delta$. O leitor verificará, sem dificuldade, que assim é utilizando a relação (1).

Teorema. o conjunto de todos as transformações aditivas definidas em G e cujo contra-dominio pertence a G formam um grupo abeliano relativamente á adição das transformações.

Basta para isso mostrar que: 1º) Se T_1 e T_2 são aditivas $T_1 + T_2$ é aditiva 2º) O é uma transformação aditiva 3º) se T é aditiva $(-T)$ tambem o é; o que é imediato.

Em tudo o que acabamos de dizer (nºs 34 e 35) podiamos supôr que T(x) era uma transformação definida em G e cujo contra-dominio era um outro grupo abeliano G_1.

Nestas condições se G_1 é o contra-dominio de T (x) aditiva, e se

$$T(x_1) = T(x_2)$$

equivale a $x_1 = x_2$

T é um isomorfismo entre G e G_1 $(G \cong G_1)$

48

§ 7 - Espaços Vectoriais Abstractos

37 - Definição - Dá-se o nome de espaço vectorial abstracto a todo o grupo abeliano E onde a cada número real ou complexo α e a cada elemento $a \in E$ se pode fazer corresponder um elemento que representaremos pela notação αa : tal que:

1º.) - $\alpha a \in E$

2º.) - Se $a_1 = a_2$ $\alpha a_1 = \alpha a_2$

3º.) - $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta) a$

4º.) - $\alpha(a + b) = \alpha a + \beta b$

5º.) - $(\alpha + \beta) a = \alpha a + \alpha b$

6º.) - $1. a = a$

A α dá-se o nome de produto do número α pelo elemento a .

A álgebra dum espaço desta natureza é exactamente a álgebra dos vectores do plano, e todas as propriedades algébricas se deduzem fàcilmente dos axiomas da definição de grupo abeliano e dos seis axiomas precedentes.

Êstes 12 axiomas não são certamente independentes mas não nos interessa nêste momento procurar uma lista de axiomas independentes. Veja, por exemplo, Banach [2], p. 26, onde se indica uma axiomática mais reduzida. A um espaço vectorial costuma às vezes dar-se o nome de espaço linear.

Sub - espaços vectoriais - Diz-se que um conjunto $E_1 \subset E$ é um sub - espaço vectorial de E ou uma variedade linear imersa em E, quando E_1 fôr um espaço vectorial, e para isso é necessário e suficiente que $\alpha a + \beta b$ seja um elemento de E_1 quando $a \in E_1$ e $b \in E_1$, sendo α e β números quaisquer. É claro que: se $a_1 \in E_1$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; a_1$$

é ainda um elemento de E_1.

38 - <u>Algebrização do conjunto das variedades lineares de E</u> -

Como uma variedade linear é um grupo abeliano define-se de uma maneira análoga a noção de soma $E_1 + E_2$ e de intersepção $E_1 \wedge E_2$ de duas variedades lineares, e esta noção gosa das propriedades indicadas. $E_1 + E_2$ e $E_1 \wedge E_2$ são variedades lineares imersas em E. Diz-se que os elementos $a_1 \in E$ são linearmente independentes, quando:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_1 = 0$$

implica que $\alpha_i = 0$

Duas variedades lineares E_1 e E_2 dizem-se linearmente independentes quando $E_1 \wedge E_2 = 0$

É claro que nestas condições:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$$

onde $a_1 \in E_1$ e $a_2 \in E_2$ implica, se $a_1 \neq 0 \neq a_2$ que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, porque se caso contrário $\alpha_1 a_1 = (-\alpha_2) a_2$ pertenceria simultâneamente a E_1 e E_2 e portanto $\alpha_1 a_1 = (-\alpha_2) a_2 = 0$ e então seria $a_1 = 0 = a_2$ o que é impossível.

Recíprocamente se

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$$

implica $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, quaisquer que sejam $a_1 \in E$ e $a_2 \in E_2$ então: $E_1 \wedge E_2 = 0$

Com efeito se assim não fôsse existiria um elemento $a \neq 0$ comum a E_1 e E_2/ Ora então $\underline{\alpha a}$ é ainda um elemento de $E_1 \wedge E_2$, qualquer que seja $\alpha \neq 0$ e era

$$\alpha a + (-\alpha) a = (\alpha - \alpha) a = 0. a = 0$$

onde $\alpha \neq 0$ e $(-\alpha) \neq 0$, o que é impossível.

Podemos portanto definir de duas maneiras a independência linear de duas variedades lineares.

50

Se E_1 e E_2, bem como E_2 e E_3, são linearmente independentes não podemos afirmar que E_1 seja linearmente independente de $E_2 \dot{+} E_3$ visto que em geral:

$$E_1 \wedge (E_2 \dot{+} E_3) \neq E_1 \wedge E_2 \dot{+} E_1 \wedge E_3 = \theta$$

Em tôdo o caso o que podemos afirmar é que se E_1 é linearmente independente de E_2 e se E_3 é uma variedade linear contida em E_2, E_1 é linearmente independente de E_3.

Podemos ainda definir independência linear de $\underline{n}$ variedades lineares da seguinte maneira.

Diremos que as $\underline{n}$ variedades lineares E_1, E_2,......, E_n são linearmente independentes, se:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \theta \qquad a_i \in E_i$$

implica que $a_i = \theta$ (i = 1, 2,.............., n),

ou então, o que é equivalente, se

$$E_i \wedge (E_1 \dot{+} E_2 \dot{+} \dots \dots \dot{+} E_{(i-1)} \dot{+} E_{(i+1)} \dot{+} E_n = \theta$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Um caso importante é aquêle em que:

$$E = E_1 \dot{+} E_2 \dot{+} \dots \dots \dot{+} E_n$$

então diremos que as variedades E_1, E_2, ... E_n determinam uma decomposição do espaço E.

Vamos mostrar que nestas condições todo o elemento $\underline{a}$ de E se pode escrever de uma única maneira sob a forma:

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{onde: } a_i \in E_i$$

com efeito se

$$a = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{onde: } b_i \in E_i$$

será

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

51

onde $$b_i - a_i \in E_i$$

Como os E_i são linearmente independentes, será

$$b_i - a_i = 0$$

isto é

$$b_i = a_i$$

Isto mostra-nos que E é a soma directa de $E_1, E_2, \ldots\ldots E_n$; para indicar êste facto, escreveremos:

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots\ldots\ldots \oplus E_n$$

Se E_i coincide com a variedade linear gerada por um único vector a_i, isto é: se E_i é formado pelos vectores da forma αa_i onde α é um número qualquer, diremos que os a_i são <u>vectores linearmente independentes</u> e que E é um <u>espaço vectorial abstracto a n dimensões</u>. E é então formado pelo conjunto dos vectores, da forma:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

onde os α_i são números quaisquer. Diremos então que os a_i formam um <u>sistema de vectores de base</u> (ou uma base) do espaço E.

Um espaço vectorial E diz-se <u>decomponível</u> quando dado um sub - espaço vectorial $E_1 \subset E$ existe um sub - espaço vectorial E_2 tal que:

$$E = E_1 \oplus E_2$$

Tudo quanto dissemos atraz sôbre os grupos decomponíveis se poderia aqui repetir para os espaços vectoriais decomponíveis.

39 - <u>Transformações aditivas e homogéneas</u> - Seja $T(x)$ uma transformação de E em E. Se definirmos $T_1 + T_2$ e αT onde α é um número, pelas condições

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$
$$\alpha T(x) = \alpha [T(x)]$$

então o conjunto $\mathcal{T}$ dos transformações dêste tipo formam um espaço vectorial como é fácil de vêr.

52

Diremos que T ($\mathscr{X}$) é aditiva e homogénea (ou linear) se:

$$T(\mathscr{X}+\mathscr{Y}) = T(\mathscr{X}) + T(\mathscr{Y})$$

$$T(\alpha\mathscr{X}) = \alpha T(\mathscr{X})$$

Verifica-se imediatamente que o conjunto destas transformações formam um espaço vectorial, e que o contra - domínio de cada uma delas é um espaço vectorial.

53

§ 8 - Aneis

40 - Definição - Consideremos um sistema algébrico $\mathcal{E}$ onde são definidas duas operações: uma adição e uma multiplicação; diremos que $\mathcal{E}(+,\cdot)$ é um anel quando $\mathcal{E}$ fôr um grupo abeliano em relação á adição e quando a multiplicação verificar alguns dos axiomas M_i.

Para cada sistema de axiomas M_i teremos uma categoria de aneis. Vamos indicar o tipo de aneis que teremos a considerar, serão aquêles em que a multiplicação verificar os seguintes axiomas:

M_1 - Existência $AB \in \mathcal{E}$

M_2 - Unicidade $A = A_1$ e $B = B_1$ implicam $AB = A_1B_1$

M_3 - Lei associativa $(AB)C = A(BC)$

MA_1- Lei distributiva da multiplicação em relação á adição

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

A multiplicação não será em geral comutativa. Teremos por vezes necessidade de supôr que existe uma unidade, isto é, um elemento E tal que $AE = EA = A$. Diremos que se trata de um anel com uma unidade. Nêste caso se cada elemento de $\mathcal{E}$, excepto Θ, tem um inverso $A^{-1} \in \mathcal{E}$ em relação á multiplicação, diremos que $\mathcal{E}$ é um corpo.

41 - Sub - anel - Um sub - conjunto $\mathcal{O} \in \mathcal{E}$ é um sub - anel de $\mathcal{E}$ se $\mathcal{O}$ é um anel; para isso é necessário e suficiente que:

1º) Se A e B são elementos de $\mathcal{O}$ $A+B$, AB, e $(-A)$ sejam ainda elementos de $\mathcal{O}$.

2º.) $\mathcal{O}$ contenha Θ

É evidente que Θ é um sub - anel de $\mathcal{E}$. Se $\mathcal{E}$ tem uma unidade E, não é ne

. . .

54

cessário supôr que $\mathfrak{A}$ contenha E, mas pode acontecer que em $\mathfrak{A}$ exista um elemento E' tal que: $E'A = AE' = A$ para todos os elementos $A \in \mathfrak{A}$. Então E' é uma unidade em $\mathfrak{A}$ o que não quere dizer que o seja em $\mathcal{E}$.

41 - <u>Anel das transformações aditivas de um grupo abeliano</u> - Seja $\mathfrak{Z}$ o conjunto de todas as transformações de um grupo abeliano G em si próprio. Já algebrizámos $\mathfrak{A}$ pela introdução de uma adição e vimos então (nº. 34) que $\mathfrak{Z}$ é um grupo abeliano. Definamos em $\mathfrak{A}$ uma multiplicação ao modo ordinário, o produto de duas transformações $T_1(\varphi)$ e $T_2(\varphi)$ é por definição a transformação $T_1(T_2(\varphi))$.

Então $\mathfrak{Z}$ forma um sistema com multiplicação, isto é: são verificados os axiomas M_1, M_2, M_3 e além disso existe uma unidade ($ET = TE = T$) onde E é definida pela condição: $\varphi = E(\varphi)$ qualquer que seja $\varphi \in \mathfrak{Z}$. É ainda fácil de vêr que é verificada a condição:

$$(B + C)A = BA + CA$$

onde A, B e C são transformações quaisquer, mas em regra não é verificada a condição:

$$(1) \qquad A(B + C) = AB + AC$$

e portanto não é um anel. É portanto importante determinar a condição necessária e suficiente que devem verificar as transformações de $\mathfrak{Z}$ para que a condição (1) seja verificada. É fácil de ~~verificar~~ reconhecer que essa condição é a seguinte:

$$T(\varphi + \gamma) = T(\varphi) + T(\gamma)$$

isto é: $T(\varphi)$ deve ser um homomorfismo de G em G. Com efeito sejam

$$\gamma_1 = B(\varphi)$$
$$\gamma_2 = C(\varphi)$$
$$z_1 = A(\gamma_1)$$

55

$$z_2 = A(y_2)$$

Façamos $D = B + C$ então

$$y_1 + y_2 = D(x)$$

$$AD = A(B + C)$$

$$AD(x) = A(D(x)) = A(y_1 + y_2)$$

$$AB(x) = A(B(x)) = A(y_1)$$

$$AC(x) = A(C(x)) = A(y_2)$$

Se (1) é verificada será:

$$A(y_1 + y_2) = A(y_1) + A(y_2)$$

e reciprocamente, c. q. d..

Se notarmos que o producto de duas transformações aditivas e ainda uma transformação aditiva, fica assim provado que o <u>conjunto $\mathfrak{A}$ dos homomorfismos de G em G formam um anel com uma unidade</u>. Um automorfismo de G é representado por um elemento de $\mathfrak{A}$ que tem um inverso em relação á multiplicação.

O conjunto de tais isomorfismos formam um grupo (.) mas não formam um anel porque a soma de dois isomorfismos não é em geral um isomorfismo.

42 - Nota. - As operações (adições e multiplicações) com elementos de um anel efectuam-se exactamente como as operações correspondentes da álgebra vulgar exceptuando-se apenas a lei comutativa. Assim

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

e em regra não será

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

43 - <u>Teorema de Hellinger - Toeplitz</u> - Pode-se demonstrar o seguinte teorema, veja-se Hellinger und Toeplitz [1].

<u>Teorema</u> - <u>Se A tem um único inverso á direita, êsse inverso á direita é ainda um inverso á esquerda.</u>

56

Com efeito seja X o inverso á direita de A, que por hipotese é único, tem-se:

$$(1) \quad AX = E$$

Multiplicando á direita por A ambos os membros desta igualdade, tem-se

$$AXA = A$$

ou

$$(2) \quad AXA - A = 0$$

Adicionando (1) e (2) vem:

$$AX + AXA - A = E$$

ou

$$A(X + XA - E) = E$$

e como o inverso á direita é único, será:

$$X + XA - E = X$$

e portanto

$$XA - E = 0$$

ou

$$XA = E$$

o que nos mostra que X é ainda um inverso á esquerda de A, c. q. d..

Se atendermos a um teorema que demonstrámos no § consagrado ao sistemas com multiplicação concluímos, que um elemento A qualquer de um anel só pode estar num dos seguintes quatro casos:

	Número de inversos a esquerda	Núm. de invers. a direita
1º. caso	1	1
2º. caso	∞	0
3º. caso	0	∞
4º. caso	0	0

57

Basta para isso demonstrar que se A tem dois inversos, á direita por exemplo, distinctos, A tem uma infinidade de inversos. Com efeito: seja

$$AB = E$$

e

$$AC = E \qquad B \neq C$$

Então $B + n(B - C)$, onde n é um número inteiro qualquer, é ainda um inverso á direita de A, com efeito:

$$A(B + n(B - C)) = AB + A(nB - nC) =$$

$$= E + n\,AB - n\,AC = E + nE - nE = E$$

C. q. d.. Êstes resultados são importantes na teoria dos operadores lineares limitados do espaço abstracto de Hilbert.

44 - <u>Noção de aditividade</u> - Diremos que dois elementos A e B de um anel são aditivos quando fôr verificada a condição:

$$(\alpha) \qquad (A + B)^n = A^n + B^n$$

qualquer que seja o número inteiro e positivo $\underline{n}$. Não é necessário supor que o anel contém uma unidade, nos seguintes teoremas:

<u>Teorema 1 - Para que dois elementos A e B de um anel sejam aditivos é necessário e suficiente que:</u>

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2$$

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3$$

Isto é que a condição (α) seja verificada para n = 1 e 2.

<u>Teorema 2 - Para que dois elementos A e B de um anel sejam aditivos é necessário e suficiente que sejam verificadas as duas condições:</u>

$$(\mathrm{I}) \qquad AB + BA = 0$$

$$(\mathrm{II}) \qquad ABA + BAB = 0$$

<u>Teorema 3 - Se A e B são aditivos será $A^m \cdot B^n = 0$ para todos os valores de m e n que satisfazem á condição á condição $m + n \geq 4$.</u>

....

58

Um caso paticularmente simples em que as condições (I) e (II) são verificadas é o caso em que AB = BA = 0. Então diremos que A e B <u>são ortogonais</u>.

<u>Teorema 4 - Para que o elemento A aditivo a B_1 e B_2 seja aditivo a B = = $B_1 + B_2$ é necessário e suficiente que:</u>

$$B_2 \; AB_1 + B_1 \; AB_2 = 0$$

<u>Teorema 5 - Se A é aditivo aos elementos B_1, B_2........... B_n aditivos entre si dois a dois, A é aditivo a</u>

$$B = \sum_{i=1}^{n} B_i$$

A noção de aditividade num anel generaliza a noção de aditividade de matrizes finitas e de núcleos de Fredholm que introduzimos num trabalho sôbre as equações integrais de Fredholm veja: A. Monteiro ([1], [2]). As demonstrações dos teoremas anteriores, são em tudo análogas ás demonstrações indicadas em ([2], p. 29 - 54); não as reproduzimos para não alongar a exposição.

Suponhamos agora que o anel considerado contém uma unidade. Podemos enunciar o seguinte teorema:

<u>Teorema - Se A e B são aditivos e se S tem um inverso, S^{-1} os elementos:</u>

$$A_1 = S^{-1} AS$$
$$B_1 = S^{-1} BS$$

<u>são ainda aditivos</u>.

Isto é: a relação de aditividade é invariante em relação ao grupo dos automorfismos inferiores do anel considerado.

A demonstração é análoga aquela que indicámos para as matrizes finitas Veja-se : A. Monteiro ([2] p. 92).

59

Uma parte da teoria da aditividade dos núcleos de Fredholm e das matrizes finitas aparece-nos assim como um caso particular da teoria da aditividade num anel.

Trata-se, portanto, de propriedades puramente algébricas. Fica assim determinado o domínio de causalidade dos teoremas indicados.

60

§ 9 - Aneis Vectoriais

45 - <u>Definição</u> - Dá-se o nome de anel vectorial a todo o sistema algébrico $\mathcal{E}$ onde são definidas três operações, uma adição ($+$), uma multiplicação (.), e uma terceira operação que a cada número α (real ou complexo) e a cada elemento $A \in \mathcal{E}$ faz corresponder um elemento $\alpha A \in \mathcal{E}$ (producto dum número α por A), que verificam as seguintes condições:

1ª.) - E é um espaço vectorial

2ª.) - E é um anel no sentido do parágrafo precedente.

3ª.) - São verificadas as seguintes condições:

$$(\alpha\beta) A = \alpha (\beta A)$$

$$(\alpha A) (\beta B) = (\alpha \beta) AB$$

Um anel vectorial diz-se real ou complexo conforme os multiplicadores α forem reais ou complexos.

Êstes axiomas são em particular verificados pelas matrizes finitas, e pelos núcleos de uma equação integral de Fredholm, etc..

A axiomática que indicamos não é possívelmente a mais simples. Alguns autores dão a um anel nestas condições o nome de <u>anel linear</u>.

46 - <u>Sub - anel vectorial</u> - Dá-se êste nome a todo o conjunto $\mathfrak{A} \subset \mathcal{E}$ que fôr um anel vectorial; para isso é necessário e suficiente que:

<u>Se A e B são elementos de $\mathfrak{A}$ e α um número qualquer, $A+B$, αA e AB sejam aínda elementos de $\mathfrak{A}$.</u>

47 - <u>Anel dos operadores lineares definidos num espaço vectorial</u> - Consideremos o conjunto $\mathcal{C}$ das transformações definidas num espaço vectorial E e cujo contra- domínio pertence a E. Vimos no nº. 39 que se definirmos $T = T_1 + T_2$ e αT pelas condições:

$$T(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

$$\alpha T(x) = \alpha \left[T(x) \right]$$

o espaço $\mathcal{T}$ é um espaço vectorial. Por outro lado vimos no nº. 41 que: para que $\mathcal{T}$ seja um anel, é necessário e suficiente que tôdas as transformações $T \in \mathcal{T}$ verifiquem a condição:

$$(1) \quad T(\varphi + \gamma) = T(\varphi) + T(\gamma)$$

Para que as transformações T formem um anel vectorial resta-nos exprimir que são verificadas as condições:

$$(\alpha\beta)T = \alpha(\beta T)$$
$$(\alpha T_1)(\beta T_2) = (\alpha\beta) T_1 T_2$$

A primeira destas condições é sempre verificada e para que a segunda o seja é necessário e suficiente que as transformações T satisfaçam á condição:

$$(2) \quad T(\alpha\varphi) = \alpha T(\varphi)$$

isto é: que T seja uma transformação homogénea. Para a demonstração desta propriedade (e de outros resultados apenas indicados)veja-se o nosso livro em preparação Álgebra das Matrizes. Consideremos um conjunto $\mathcal{L}$ das transformações definidas num espaço vectorial, que goza das propriedades (1) e (2), a que daremos o nome de *transformações aditivas e homogéneas* ou *operadores lineares*.

O contra - domínio de um operador linear é um *espaço vectorial* imerso em E; um tal operador define por tanto um homomorfismo de E num sub - espaço de E.

Um resultado importante, e que justifica a introdução da noção de anel vectorial é a seguinte:

Teorema - *O conjunto $\mathcal{L}$ dos operadores lineares definidos num espaço vectorial formam um anel vectorial.*

62

O estudo dos operadores lineares é um dos capítulos mais importantes da matemática moderna. Julgamos que na exposição precedente mostrámos bem como é que, por considerações de ordem puramente algébrica, se pode ser levado naturalmente a conceber a noção de operador linear.
Um resultado elementar que convém assinalar é o seguinte: se E for um espaço vectorial abstracto a n dimensões, $\mathcal{L}$ é um espaço isomorfo ao conjunto das matrizes quadradas de ordem n. Veja-se uma demonstração desta propriedade no nosso livro já citado.

63

§ 10 - Tipo algébrico de um espaço

48 - Definição - Vamos agora introduzir a noção de tipo algébrico de um espaço, que desempenha em Álgebra Abstracta o mesmo papel que a noção de potência de um conjunto desempenha na teoria dos conjuntos abstractos. Esta noção aplica-se, como veremos, exclusivamente a espaços algébricos. Para fixar ideias suporemos que se trata de espaços algébricos A, B, C, etc, em cada um dos quais se supõe definita uma única operação algébrica; mas é claro que as mesmas definições são aplicáveis ao caso em que existe mais do que uma operação em cada um dêles.

I - Diremos que dois espaços algébricos A e B têm o mesmo tipo algébrico, se A for isomorfo a um sub - espaço $B_1 \subset B$ e se B fôr isomorfo a um sub - espaço $A_1 \subset A$.

Nestas condições, escreveremos:

$$t(A) = t(B)$$

(leia-se: o tipo algébrico de A é igual ao tipo algébrico de B).

II - Diremos que o tipo algébrico do espaço A é superior ao tipo algébrico do espaço B se A for isomorfo a um sub - espaço $B_1 \subset B$ e se B não for isomorfo a nenhum sub - espaço $A_1 \subset A$.

Então escreveremos:

$$t(A) > t(B)$$

Nestas condições também podemos dizer que o tipo algébrico do espaço B é inferior ao tipo algébrico do espaço A e escreveremos:

$$t(B) < t(A)$$

Há ainda lógicamente dois casos possíveis.

64

III - ~~xxxxxx~~ <u>O tipo algébrico de A é inferior ao tipo algébrico de B</u> e então escreveremos:

$$t(A) < t(B)$$

IV - <u>Diremos que os tipos algébricos de A e B são incomparáveis se A não fôr isomorfo a nenhum sub - espaço $B_1 \subset B$ e se B não fôr isomorfo a nenhum sub - espaço $A_1 \subset A$.</u>

Vamos indicar exemplos em que d~~ão~~ so estes quatro casos.

<u>1º. exemplo</u> - Suponhamos que A é o conjunto dos números inteiros: 1, 2, 3,........, n,....... e que a operação algebrizante é a adição no sentido ordinário. Seja por outro lado B o conjunto dos números inteiros pares: 2, 4, 6,..........,2n,....... com a mesma operação algebrizante. A e B são espaços algébricos visto que a soma de dois números inteiros (resp. pares) é um número inteiro (resp. par). Como B é um sub - espaço de A podemos dizer que A é isomorfo a um sub - espaço de B. Existe ainda um isomorfismo entre B e um sub - espaço $A_1 \subset A$. Podemos por exemplo supôr que A_1 é formado pelos múltiplos de 4.

<u>2º. exemplo</u> - Se A for o conjunto dos números riais e B o conjunto dos números racionais é evidente que $t(A) > t(B)$ relativamente á adição e á multiplicação. Como $B \subset A$ é claro que B é isomorfo a B e portanto a um sub - espaço de A. A não pode ser isomorfo a um sub - espaço de B, porque então existiria uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números riais e um sub - conjunto dos números racionais, o que é impossível.

<u>3º. exemplo</u> - Todo o grupo que contém um sub-grupo finito tem um tipo algébrico incomparável com o espaço A indicado no primeiro exemplo.

É necessário fazer algumas observações sôbre as definições precedentes.

a) Em primeiro logar é evidente que se A e B são dois espaços isomor-

65

fos será t (A) = t (B), isto é: o tipo algébrico de um espaço mantém-se por isomorfismo; não sabemos se a recíproca desta proposição é verdadeira, em todo o caso parece-nos pouco provável que assim seja. As dificuldades no estudo desta questão provêm do facto de não existir em regra uma algebrização conveniente dos sub - espaços de um espaço algébrico.

a) O problema da tricotomia resolve-se pela negativa para a noção de tipo algébrico visto que há espaços de tipos algébricos incomparáveis.

b) Se A e B têm o mesmo tipo algébrico, os conjuntos A e B têm a mesma potência, mas a recíproca não é verdadeira.

c) Se t (A) $\leq$ t (B) a potência do conjunto A é quando muito igual à potência do conjunto B.

d) Tôdas as propriedades da igualdade e da desigualdade que indicámes para a noção de potência são ainda verificadas para a noção de tipo algébrico.

e) Como existe um grupo abeliano numerável universal $\mathfrak{A}$ é evidente que tôdo o grupo abeliano numerável A tem um tipo algébrico igual ou menor que o tipo algébrico de $\mathfrak{A}$. Seria importante indicar um exemplo de um grupo abeliano numerável A tal que t (A) < t ($\mathfrak{A}$); em qualquer dos casos não existe nenhum grupo abeliano numerável com um tipo algébrico superior a $\mathfrak{A}$.

66

Capítulo III

Topologia Abstracta

§ 1 - Espaços (V)

1 - Espaços topológicos. Diz-se habitualmente que um conjunto abstracto E é um espaço topológico se existe uma operação D (a que se dá o nôme de derivação) que a cada sub - conjunto $A \subset E$ faz corresponder um outro conjunto A' (a que se dá o nôme de conjunto derivado de A). Aos elementos de A' dá-se o nôme de elementos de acumulação ou pontos limites de A. É evidente que $A' = D(A)$. Não nos parece que esta noção corresponda á noção intuitiva de espaço topológico, visto que se E (O) for um espaço algébrico e se fizermos corresponder a cada sub - conjunto $A \subset E$ o conjunto A' dos elementos da forma a_1 e a_2 onde a_1 e a_2 são dois elementos quaisquer de A, o espaço algébrico E (O) aparece-nos assim como um espaço topológico. Estamos portanto de acôrdo com Fréchet quando êle restringe a noção de espaço topológico.

Um espaço topológico é um sistema (E, D) formado por um conjunto abstrato E e por uma Operação D definida sobre o conjunto $\mathcal{E}$ dos sub - conjuntos de E e que a cada elemento $A \in \mathcal{E}$ faz corresponder um conjunto qualquer $A' = D (A)$ de tal maneira que sejam verificadas as seguintes condições:

1º.) - Unicidade - se $A_1 = A_2$ será $D (A_1) = D (A_2)$

isto é: D (A) é um conjunto único e bem determinado.

2º.) - Para que $a \in A'$ é necessário e suficiente que A - (a) não seja vazio e que $a \in D (A - (a))$. Isto é, o facto de a pertencer a D (A) só depende dos pontos de A distinctos de a, ou ainda: se a

67

é um ponto limite de A êle é aínda ponto limite de A - (a) e recíprocamente.

Trata-se evidentemente de uma restrição importante, mas em tôdo o caso a teoria dos espaços que satisfazem apenas a estas duas condições não nos conduziria muito longe.

Esta noção permite-nos porém pôr em evidência a ideia de que a operação de derivação é uma noção fundamental da topologia.

A topologia pode ser baseada sôbre outras noções primitivas, por exemplo: vizinhança, conjunto fechado, conjunto aberto, "fermeture" (ou conjunto de inclusão, na terminologia do Prof. Mira Fernandes) ponto interior, etc..

Nós vamos aqui definir o objectivo da topologia utilizando como noção primitiva a noção de vizinhança que nos parece a mais intuitiva muito embora existam noções da topologia que se não sabem aínda exprimir por intermédio da noção de vizinhança.

2 - Espaços (V) -Vamos agora considerar umas das classes mais importantes de espaços topológicos, classe que foi considerada pela primeira vez por M. Fréchet e na qual a noção de ponto limite ou ponto de acumulação é defénida por intermédio da noção vizinhança.

Defénição - Diremos que um conjunto abstracto E é um espaço (V) se a tôdo o elemento $a \in E$ corresponde uma família $\{V (a)\}$ de sub - conjuntos de E, a cada um dos quais daremos o nome de vizinhanças de elemento a, e que satisfazem à seguinte condição:

V_1 - Tôdo o elemento $a \in E$ pertence a cada uma das ~~seguintes~~ suas vizinhanças, isto é: $a \in V (a)$.

Defénição L_o - Diremos que a é um ponto de acumulação do conjunto $A \subset E$ se tôda a vizinhança V (a) contém pelo menos um ponto de A, diferente de a . Conjunto derivado de A é o conjunto dos seus elementos de acumulação, em notação A'.

68

É claro que nestas condições todo o espaço (V) é um espaço topológico.

As definições que acabamos de dar de ponto limite num espaço (V) é devida a M. Fréchet, veja por exemplo (1) p. 172. Esta definição em todo o caso merece-nos alguns reparos.

Consideramos, por exemplo, o conjunto E dos pontos de um plano e consideremos como vizinhanças de um ponto a e ~~[illegible]~~ os conjuntos formados pelo ponto a e pelos pontos de coordenadas racionais interiores a um circulo de centro a e de raio δ. O conjunto $A \subset E$ de todos os pontos que têm uma das coordenadas irracionais não teria em face da definição anterior nenhum ponto limite. Em todo o caso todo o ponto do conjunto A é um ponto limite do espaço E.

A topologia que acabamos de indicar não tem nada de artificial, ela intervém por exemplo quando se quere completar o corpo dos números racionais. Podemos portanto concluir que é a definição de ponto limite de um conjunto A que não está formulada de uma maneira conveniente. Vamos portanto modificá-la.

Definição L_1 - Diremos que α é um ponto limite do conjunto $A \subset E$ (supomos é claro que E é um espaço (V)) quando para cada vizinhança $V(\alpha)$ existe um ponto $a \in A$ e uma vizinhança $V(a)$ tais que todos os pontos de $V(a)$, excepto eventualmente o ponto a, estão contidos em $V(\alpha)$, isto é, tais que:

$$V(\alpha) \supset V(a) - a$$

É claro que nestas condições, no exemplo anteriormente indicado um conjunto de pontos de coordenadas irracionais já pode ter um ponto limite.

Em virtude da condição 2ª do nº 1, podemos supor sem alterar a topologia de E que $V(a)$ não contém o ponto a, isto é, podemos suprimir

69

a condição V_1 na defenição de espaço (V), então podemos dizer mais simplesmente que α é ponto limite de A se a cada V (α) corresponde um elemento $a \in A$ e uma vizinhança V (a) tal que

$$V(\alpha) \supset V(a)$$

O que acabamos de dizer põe em evidência a ideia de que um espaço abstrato em que se toma como noção primitiva a noção de vizinhança a topologia dêsse espaço depende da defenição que adoptarmos para a noção de ponto limite.

Para reforçar esta ideia vamos apresentar um outro exemplo. Consideremos ainda o conjunto dos pontos de um plano e supunhamos que defenimos as vizinhanças de um ponto da seguinte maneira:

Se a = o(respectivamente $a \neq o$) consideremos como vizinhanças de a o conjunto dos pontos de coordenadas racionais (resp. irracionais) interiores a um circulo de centro a ~~o conjunto dos pontos~~ e de raio δ

A origem não é um ponto limite do conjunto dos pontos de coordenadas irracionais quando se adoptam as defenições de ponto limite L_o ou L_1.

Porém a origem é um ponto limite do conjunto dos pontos de coordenadas racionais quando se adopta a defenição L_o e não o é na defenição L_1.

Estas circunstâncias parecem-nos extraordinàriamente graves atendendo a que existem espaços (V) bastante particulares, como sejam os espaços de Hausdorff em que as duas defenições L_o e L_1 não são topològicamente equivalentes, isto é: não definem uma única operação de derivação como seria de esperar. Note-se que os exemplos que acabamos de indicar são exemplos de espaços de Hausdorff.

Por outro lado A. Weil, [1] - pg 5, num trabalho recente, obriga as famílias de vizinhanças de cada ponto a a verificarem a condição V_1 e V_4 - A cada V (a) corresponde uma vizinhança V_1 (a) da mesma família, tal que V (a) contenha pelo menos uma vizinhança V (b) da

70

da família associada a cada um dos elementos b de V_1 (a).

É claro que nos exemplos que indicámos anteriormente esta condição é verificada e o axioma V_1' não elimina portanto as dificuldades que indicámos.

As dificuldades provêm do facto de existirem pontos vizinhos de um ponto a que são todos pontos vizinhos de outro ponto α sem que a seja um ponto vizinho de α.

É claro que esta condição já se não dá se obrigarmos as vizinhanças a satisfazerem á seguinte condição:

V_1^* - Se dada uma vizinhança V (α) existe um ponto a ao qual corresponde uma vizinhança V (a) tal que: V (a) - a $\subset$ V (α), então o ponto a pertence a V(α).

Nestas condições se α é um ponto limite de A segundo a definição L_1 α é ainda um ponto limite segundo a definição L_0, mas a recíproca pode não ser verdadeira, como o mostra o 2º exemplo que indicámos anteriormente. Se as vizinhanças satisfazem aos axiomas V_1 e V_1^* e se α não é um ponto limite de A segundo a definição L_0, α não é ainda um ponto limite de A segundo a definição L_1 como é fácil de verificar.

Portanto a definição L_0 conduz no caso em que os axiomas V_1 e V_1^* são verificados a atribuir a todo o conjunto A um conjunto derivado máximo, isto é: a operação de derivação obtida por L_0 em geral conduz a mais pontos limites que aquela que é obtida por L_1.

Se um espaço (V) só satisfaz ao axioma V_1 sem satisfazer a V_1^* é sempre possível modificar a primeira família das vizinhanças V (a) dadas no espaço considerado, de tal maneira que seja verificado o axioma V_1^* basta para isso incluir em cada V (a) todos os pontos b para os quais existe uma vizinhança V (b) tal que V (b) - b $\subset$ V (a).

Representemos por V' (a) as novas vizinhanças assim obtidas; é claro que para a família V' (a) são verificadas as condições V_1 e V_1^*.

Ficam assim resolvidas em parte as dificuldades que apresentámos.

Seria importante determinar as condições necessárias e sufizientes a que devem satisfazer as vizinhanças para que as defenições L_0 L_1 conduzam á mesma topologia.

Vamos agora indicar uma condição suficiente para que todo o ponto limite L_0 seja um ponto limite L_1. A condição é a seguinte:

V_3 - se o ponto a pertence á vizinhança V (α) existe sempre uma vizinhança V (a) contida em V (α).

Encontraremos mais adiante esta condição.

As dificuldades não param aqui. Com efeito ainda é possível dar uma nova defenição de ponto limite num espaço (V).

Defenição L_2 - Diremos que α é um ponto limite de um conjunto A de um espaço (V) quando ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ dada uma vizinhança qualquer V (α) existe um ponto $a \in A$ ao qual corresponde uma vizinhança V (a) tal que: para cada um dos seus pontos exista uma vizinhança contida contida em V (α) .

Pode acontecer que α não seja ponto limite de A segundo as defenições L_0 e L_1 e que o seja segundo a defenição L_2.

Consideremos o conjunto E dos números riais e definamos vizinhanças de um ponto a como um certo conjunto V (a) que será um sub - conjunto dos números b tais que $|b - a| < \delta$ defenido da seguinte maneira:

1ª.) - Se a é racional os b b são racionais

2ª.) - Se a é algébrico os b b são racionais

3ª.) - Se a é transcendente os b b são algébricos

Então os números racionais não são limites L_0 nem L_1 dos números transcendentes, mas são limites L_2 dos números transcendentes.

Êstes resultados podem-se generalizar.

Defenições - Chamemos vizinhanças de ordem zéro de um ponto a (em notação V^0 (a)) ao conjunto formado pelo elemento a. Chamemos vizinhança de ordem 1 de a a todo o conjunto V (a) - a (em notação

72

$V^{(1)}$ (a)). Chamemos vizinhança de ordem n do ponto a a todo o conjunto $V^{(n)}$(a) que é soma de um conjunto de vizinhanças de ordem 1 de cada um dos pontos de $V^{(n-1)}$(a). Diremos que α é ponto limite L_n de um conjunto de A se dada a vizinhança V (α) existir sempre um ponto a, para o qual existe $V^{(n)}(a) \subset V (\alpha)$.

A cada defènição de ponto limite corresponde uma topologia.

As condições suficientes V_1^* e V_3 para que as topologias L_o e L_1 sejam ... idênticas podem agora enunciar-se da seguinte maneira:

V_1^* - Se uma vizinhança de α V (α) contém uma vizinhança de 1ª ordem de a , então V (α) contém a .

V_3 - Para cada ponto a de V (α) existe uma vizinhança de a de 1ª ordem contida em V (α).

Um resultado interessante é o seguinte:

Teorema I - Se um espaço (V) verifica a condição V_1^* todo o ponto limite L_n é ainda um ponto limite L_o .

Teorema II - Se um espaço (V) verifica a condição V_3 todo o ponto limite L_o. é um ponto limite L_n.

A demonstração dêste teorema é imediata e portanto as condições V_1^* e V_3 são sufisientes para que as topologias defènidas por L_o e L_n sejam ... idênticas.

Por isso parece indispensável obrigar as vizinhanças, dadas à priori, a satisfazerem àquelas duas condições, se quizermos obter resultados simples, e evitar as complècações que resultam do facto de uma mesma família de vizinhanças não conduzir em regra ao mesmo espaço topológico. A noção de espaço (V) é extremamente geral.

Tôdo o conjunto abstrato E é um espaço (V); com efeito basta defènirmos as vizinhanças por meio da condição:

$$V (a) = E \text{ qualquer que seja } a \in E.$$

73

Pode acontecer que num espaço E existam duas famílias diferentes de vizinhanças $\{V(a)\}$ e $\{W(a)\}$. Cada uma delas define uma topologia em E a que chamaremos topologia V e topologia W. Diremos que as duas famílias de vizinhanças são topològicamente equivalentes quando elas definem em E a mesma topologia, isto é: quando o derivado de $A \subset E$ qualquer seja A_1, é o mesmo em relação ás topologias V e W.

Teorema - Para que dois sistemas de vizinhanças V (a) e W (a) sejam topològicamente equivalentes é necessário e suficiente que tôda a vizinhança V (a) da primeira família contenha pelo menos uma vizinhança W (a) da segunda e recíprocamente.

Demonstração: A condição é evidentemente suficiente. que é necessária resulta do seguinte: suponhamos que V (a) não continha nenhum W (a) Em cada W (a) existiria um elemento b não pertencente a V (a), e o conjunto B dos elementos b teria a como ponto limite na topologia W, circunstância que não seria verificada na topologia V (veja M. Fréchet [2]).

Podemos introduzir as seguintes defenições num espaço (V):

Diremos que A é um conjunto:

1º.) - fechado se $A' \subset A$

2º.) - denso em si mesmo ou condensado se $A \subset A'$

3º.) - perfeito se $A = A'$

Diremos que a é um ponto de condensação do conjunto A se existe uma infinidade não numerável de pontos de A em toda a vizinhança V (a). Para que num espaço (V) possam existir pontos de condensação é necessário e suficiente supôr que V (a) tem uma potência superior á do numerável.

Quando assim não fôr é ainda possível defenir ponto de condensação da seguinte maneira (utilizando a defenição de ponto limite L_1): a é um ponto de condensação de A se qualquer que seja V (a) existir uma

74

uma infinidade não numerável de pontos b $\in$ A para cada um dos quais existe uma vizinhança V (b) tal que

$$V(b) - b \subset V(a)$$

Obrigando os espaços (V_1^*) a satisfazerem ao axioma V_1 esta duplicidade na definição de ponto de condensação desaparece.

Diz-se que <u>a</u> é um <u>ponto interior</u> de A se existe uma vizinhança V (a) tal que V (a) $\subset$ A donde resulta que <u>a</u> é interior a V (a).

Diz-se que <u>a</u> é um <u>ponto exterior</u> de A se <u>a</u> é interior ao seu complementar $\mathcal{C}$ (A).

Diz-se que <u>a</u> é um <u>ponto fronteira</u> de A se <u>a</u> não é nem interior nem exterior a A, isto é se cada V (a) contém um ponto de A e outro de $\mathcal{C}$ (A).

Um <u>conjunto</u> diz-se aberto se todos os seus pontos são pontos interiores. Se um espaço (V) satisfaz á condição V_3 todos os pontos de V (a) são pontos interiores a V (a).

Podíamos introduzir muitas outras definições habituais na teoria dos conjuntos, mas nós não pretendemos fazer uma teoria completa da topologia abstrata, pretendemos apenas nêste capítulo definir ~~algumas~~ o objectivo da topologia abstracta e fazer algumas observações.

3 - <u>Funções contínuas</u> - sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois espaços (V) e x $\in \mathcal{X}$, Y $\in \mathcal{Y}$. Diremos que a transformação

$$y = f(x)$$

de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ é contínua no ponto x de X se qualquer que seja V (y) existe uma vizinhança V (x) tal que o conjunto transformado de V (x) seja um sub - conjunto de V (y).

Diremos que f é uma transformação contínua de X em Y = f (X) se

75

ela é contínua em todos os pontos de X.

4 - Homeomorfias - Se a transformação f de que falámos no número precedente estabelecer uma correspôndencia biunívoca entre X e Y e se ela fôr contínua, diremos que se trata de uma homeomorfia . Para indicar que os conjuntos A e B pertencentes a dois espaços (V) são homeomorfos usaremos a notação:

$$A \approx B$$

o leitor verificará sem dificuldade que a relação de homeomorfia gosa de todas as propriedades da relação de igualdade.

5 - Objectivo da Topologia - A topologia tem por objectivo o estudo das propriedades dos espaços topológicos E que se mantêm invariantes quando se transforma E por meio de uma homeomorfia. É impossível distinguir na topologia dois espaços homeomorfos, visto que tôdas as propriedades topológicas de um dos espaços pertencem ao outro espaço e recíprocamente. As noções primitivas da topologia são as noções primitivas da teoria dos conjuntos $a = b$, $a \in A$ e a noção de ponto limite defénida por intermédio de uma família de vizinhanças. Recorrendo apenas a estas noções e às funções proposicionais da Lógica formal é possível contruir toda a topologia. Toda a função proposicional assim obtida será chamada topológica .

Todas as proposições que se podem enunciar por meio de funções proposicionais topológicas, são invariantes por uma homeomorfia. Assim se $A \subset \mathcal{X}$ é um conjunto fechado isto é se $A' \subset A$ e se f for uma homeomorfia será $f(A') \subset f(A)$, $f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ e portanto $f(A)$ é um conjunto fechado no espaço $\mathcal{Y}$.

Já dissemos que podiamos tomar como noções primitivas da topologia outras noções. É o que faz por exemplo Kuratowski [1] que constroi

76

a topologia baseando-se na noção de <u>fermeture</u> ou conjunto de inclusão.

77

§ 2 - Tipo de dimensão de um espaço topológico.

6 - Definição - A noção de tipo de dimensão de um espaço topológico foi introduzida por M. Fréchet [1] no princípio dêste século, da seguinte maneira:

I - Diremos que o tipo de dimensão de um espaço topológico A é igual ao tipo de dimensão do espaço topológico B quando existir uma homeomorfia entre A e um sub - conjunto $B_1 \subset B$ e uma homeomorfia entre B e um sub - conjunto $A_1 \subset A$. Para indicar êste facto, escreveremos:

$$dA = dB$$

II - Diremos que o tipo de dimensão de A é inferior ao tipo de dimensão de B quando existir uma homeomorfia entre A e um sub - conjunto $B_1 \subset B$ e não existir nenhuma homeomorfia entre B e um sub - conjunto $A_1 \subset A$. Para indicar êste facto, escreveremos:

$$dA < dB$$

III - Diremos que o tipo de dimensão de A é superior ao tipo de dimensão de B quando fôr $dB < dA$, e então escreveremos:

$$dA > dB$$

IV - Diremos que os tipos de dimensão de A e B são incomparáveis quando não existir nenhuma homeomorfia entre A e um sub - conjunto $B_1 \subset B$ nem entre B e um sub - conjunto $A_1 \subset A$.

Êstes quatro casos podem efectivamente dar-se.

Notemos que a noção de tipo de dimensão é absolutamente análoga às noções de potência de um conjunto e de tipo algébrico de um espaço.

Vamos agora indicar algumas das propriedades do tipo de dimensão.

1ª.) - O tipo de dimensão goza de tôdas as propriedades da desigualdade e da igualdade que indicámos para a noção de potência, no capítulo I.

78

2ª.) - Se $\alpha A = \alpha B$ os conjuntos A e B têm a mesma potência, isto é: $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$

3ª.) - Se $\alpha A < \alpha B$ será $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}}$

4ª.) - O conjunto das homeomorfias formam um grupo de transformações quando se defíne produto de duas transformações ao modo ordinário (grupo que é um sub - grupo do grupo das equivalências). Daremos a êste grupo o nome de grupo das homeomorfias . A topologia está portanto lógicamente subordinada á teoria dos conjuntos abstractos.

5ª.) - Se A e B são homeomorfos ($A \approx B$) será $\alpha A = \alpha B$, mas a recípro ca não é verdadeira. Em todo o caso em virtude do corolário 1 do Teorema de Banach (capº II, número 16) podemos afirmar: Se $\alpha A = \alpha B$ é possível decompôr cada um dos conjuntos A e B em conjunto disjuntos respectivamente homeomorfos. Basta verificar que a relação de homeomorfia possui a propriedade (α) naquele local defínida. A noção de tipo de dimensão de um espaço desempenha(1) na teoria dos conjuntos pela noção de potência, e por isso ela tem sido tão profundamente estudada nêstes últimos tempos. Como se vê ela pode ser concedida num espaço (V) qualquer e era ~~sôb~~ êste ponto que nos interessava aqui indicar.

O teorema de Banach que acabamos de indicar é o teorema fundamental sobre a estrutura da noção de tipo de dimensão e desempenha na topolo gia um papel análogo ao que o teorema de Cantor - Bernstein desempenha na teoria dos conjuntos abstractos.

(1) na topologia um papel análogo ao papel desempenhado

79

§3-Espaços (V) particulares.

7- Mesmo que obriguemos os espaços (V) a verificarem os axiomas V_1, V_1^*, e V_3, a noção de espaço (V) pode ainda ser verdadeiramente patológica; é o caso de um espaço E em que todos os pontos tivessem como única visinhança o proprio espaço E; num tal espaço (V) qualquer ponto tem por derivado o espaço inteiro E. Deve-se portanto obrigar um espaço (V) a satisfazer a condições restrictivas escolhidas de tal modo que a topologia assim definida tenha as propriedades mais importantes da topologia ordinaria do plano euclideano e ainda que essas categorias de espaços topológicos contenham como caso particular a topologia dos espaços funcionais mais importantes.

A topologia abstrata tem estado permanentemente no decorrer do seu desenvolvimento sôb a influência desta duas correntes, uma que obriga a restringir o seu campo de estudo outra que a obriga a alargá-lo tanto quanto possivel.

Vamos agora indicar uma primeira lista de axiomas que nos permitirá definir os espaços (V) mais importantes.

V_1 - Todo o ponto a de E pertence a cada uma das suas visinhanças: $a \in V(a)$

V_1^*-Se V (a) contém completamente o conjunto V(b)-b, então V(a) contém o ponto b.

V_2- Aparte comum a duas vizinhanças de um ponto a qualquer, contém sempre uma terceira vizinhança do mesmo ponto a.

V_3 - Se o ponto b pertence a V (a), existe sempre uma vizinhança V(b) contida em V(a)

V_4' -Quaisquer que sejam os dois pontos diferentes a e b, existe V(a) que não contém b e existe V(b) que não contém a.

V_4'' - Quaisquer que sejam os dois pontos diferentes a e b, existem duas vizinhanças V(a) e V (b) sem pontos comuns,

Notemos que fomos levados a obrigar as vizinhanças a satisfazerem aos axiomas V_1, V_1^*, e V_3 .

80

Dá-se em toplogia o nome de <u>espaço acessivel</u> (Fréchet) a todo o espaço(V) em que as vizinhanças verificam os axiomas V_1, V_2, V_3 e V_4'.

Num espaço (V) que satisfaz ao axioma V_1 pode-se definir um espaço adessivel como um espaço (V) onde os pontos limites L_0 dos sub-conjuntos do espaço sarisfazem ás seguintes condições:

A_1 - <u>A operação de derivação é distributiva em relação á adição de conjuntos,</u> isto é

$$D(A+B) = D(A)+D(B)$$

ou

$$(A+B)' = A'+B'$$

A_2 - <u>Um conjunto formado por um número finito de pontos não pode ter nenhum ponto ~~finito~~ limite</u>

A_3 - <u>Todo o conjunto derivado é fechado,</u> isto é:

$$D\,D\,(A) \subset D(A)$$

ou

$$(A')' \subset A'$$

A recíproca é verdadeira. Se num espaço topológico a operação de derivação verifica os axiomas A_1, A_2 e A_3, E é um espaço(V) acessivel. Basta para isso defenir V(a) como um conjunto aberto arbitrário contendo a.

Nos espaços acessiveis uma sucessão de pontos $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ que tende para um limite <u>a</u>, pode tender ao mesmo tempo para outro limite $b \neq a$, mas esta circunstância já não se verifica num <u>espaço de Hausdorff</u> [redacted] [espaço (V) em que são verificados os axiomas V_1, V_2, V_3 e V_4''].

Existem ainda outras categorias de espaços como sejam os espaços regulares e normais de Alexandroff e espaços completamente normais.

Vêr sobre este assunto Frechet, [1] pag.204, e o magnífico resumo dos estudos feitos no seminário de Moscou no ano 1924-25 de Tychonoff e Vedenissoff [1], discípulos de Alexandroff.

8- <u>Espaços L</u> - Um conjunto E é um espaço L(Fréchet) quando se faz corresponder a certas sucessões de elementos de E

$$a_1,\ a_2, \ldots a_n, \ldots$$

81

(a que daremos o nome de sucessões convergentes) um elemento $a = \lim_{n=\infty} a_n$ de ~~xxx~~ tal maneira que sejam verificadas as seguintes condições:

L_1) qualquer que seja a sucessão extraida da sucessão dada ela converge para a.

L_2) Se os elementos da sucessão dada são todos iguais a a, a sucessão converge para a.

Se for ainda verificado o axioma:

L_3 - Se uma sucessão não converge para a, ela contém uma sucessão parcial da qual é impossivel extrair uma sucessão convergente para a (Alexandreff e Uryshon).

Diremos que se trata de um espaço L^* (notação de Kuratowski) [1] pag. 76

Diz-se que f(x) é uma função continua num espaço L^* se

$$\lim_{n=\infty} x_n = x \quad \text{implica} \quad \lim_{n=\infty} f(x_n) = f(x)$$

É claro que supômos que o contra-dominio de f(x) é um espaço L^*.

Todo o espaço L é evidentemente um espaço topológico, mas não é necessariamente um espaço de Hausdorff.

Todo o espaço de Hausdorff é porém um espaço L^* se admitirmos que o ponto a é limite da sucessão a_n quando a cada vizinhança V(a) corresponde um indice N tal que

$$a_n \in V(a) \text{ para } n > N$$

Para as propriedades dêstes espaços veja-se o livro de Fréchet já citado

82

§ 4 - Topologia dos conjuntos abstractos

9 - Limite de uma sucessão de conjuntos.

- Seja E um conjunto abstracto qualquer e $\mathcal{E}$ o conjuntos dos seus sub-conjuntos. Já mostrámos que é possivel definir uma Álgebra em $\mathcal{E}$, vamos agora ver que $\mathcal{E}$ é um espaço topológico, maîs precisamente $\mathcal{E}$ é um espaço $\mathcal{L}$.

Seja: $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

uma sucessão qualquer de conjuntos.

Dá-se o nome de maior dos limites (de la Vallée Poussin) ou limite superior (Hausdorff) da sucessão A_n ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a uma infinidade de ~~xxxx xxxxxx~~ conjuntos da sucessão dada, conjunto que representaremos pela notação

$$\overline{\lim_{n=\infty}} A_n$$

Dá-se o nome de menor dos limites ou limite inferior da sucessão A_n ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a todos os conjuntos da sucessão dada, salvo quando muito a um número finito dêles, conjunto que representaremos pela notação:

$$\underline{\lim_{n=\infty}} A_n$$

Em face destas definições vê-se imediatamente que:

1º) Qualquer que seja a sucessão dada A_n, o seu limite superior e o seu limite inferior são conjuntos bem determinados.

2º) Se $A_n = A$ qualquer que seja n, será

$$A = \overline{\lim_{n=\infty}} A_n = \underline{\lim_{n=\infty}} A_n$$

83

3º) Se A_i fôr uma sucessão parcial extraída da sucessão dada é:

$$\overline{\lim_{i=\infty}} A_i \subset \overline{\lim_{n=\infty}} A_n$$

$$\underline{\lim_{i=\infty}} A_i \supset \underline{\lim_{n=\infty}} A_n$$

4º) É sempre verificada a condição

$$\underline{\lim_{n=\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n=\infty}} A_n$$

Diremos que uma sucessão de conjuntos A_n tende para <u>um limite</u> se

$$\overline{\lim_{n=\infty}} A_n = \underline{\lim_{n=\infty}} A_n$$

e que será representado pela notação

$$\lim_{n=\infty} A_n$$

Nestas condições são verificadas as seguintes propriedades:

L_1 -Se A_i fôr uma sucessão parcial extraida da sucessão dada A_n, que por hipótese tende para um limite, então será:

$$\lim_{i=\infty} A_i = \lim_{n=\infty} A_n$$

L_2 - Se $A_n = A$, qualquer que seja <u>n</u>, então

$$\lim_{n=\infty} A_n = A$$

Podemos portanto afirmar que $\mathcal{E}$ é um espaço L. A noção de limite superior e de limite inferior não transformam $\mathcal{E}$ num espaço L porque a condição L_1 não é verificada como acabamos de ver.

10 - <u>Equivalência e homeomorfia</u>.

Como $\mathcal{E}$ é um espaço topológico é possivel definir homeomorfia entre dois espaços $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ associados a E e E', e tipo de dimensão de um espaço $\mathcal{E}$.

84

Suponhamos que E e E' são equivalentes

$\left[E' = f(E), \; E = f^{-1}(E') \right]$ então $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ também o são;

É curioso observar que a correspondência biunívoca que existe entre $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ é uma homeomorfia quando se consideram $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ como espaços topológicos, sendo a topologia definida por

$$\lim_{n=\infty} A_n$$

visto que se f é uma equivalência e se

$$A = \lim_{n=\infty} A_n$$

será

$$f(A) = \lim_{n=\infty} f(A_n)$$

Parece-nos que esta observação tem a sua importância, e que ela nos explica a razão pela qual a noção de limite de uma sucessão de conjuntos desempenha um papel importante na teoria dos conjuntos abstractos.

As razões atras indicadas justificam a preferência que se dá à noção de limite e não às noções de limite superior e de limite inferior, mas existem outras razões que só poderão ser indicadas no capítulo seguinte consagrado à Análise Geral.

2 85

§ 5 - Espaços distanciados

11 - **Noção de distância.** Diremos que um espaço E é distanciado relativamente a uma dada relação de igualdade definida em E, quando a cada par ordenado (x, y) de elementos de E se faz corresponder um número real qua representaremos pela notação $d(x, y)$ - a que daremos o nome de distância de x a y - que verifique os seguintes axiomas:

D_1 - Axioma de igualdade. $x = x'$ implica $d(x, y) = d(x', y')$

D_2 - $d(x, y) \geq 0$ quaisquer que sejam x e y de E

D_3 - $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$

D_4 - Axioma de simetria. $d(x, y)$ $d(y\ x)$ quaisquer que sejam x e y de E.

D_5 - Axioma da desigualdade triangular.

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

quaisquer que sejam x e y e z de E.

Esta noção é devida a M. Frechet [1, pgs. 55] e desempenha um papel de primeira importância na análise moderna. A designação de espaço distanciado foi proposta por Bouligand, que abreviaremos utilizando, como Frechet, a expressão "espaço (D)". Hausdorf dá a um espaço (D) o nome de espaço métrico.

12 - **Axiomática de Lindenbaum.** Os 5 axiomas anteriores que caracterizam a noção de distância são equivalentes aos dois axiomas seguintes [Lindenbaum - 1, pgs. 211]

D_3^* - $d(x, y) = 0$ equivale $x = y$

D_5^* - Desigualdade triangular

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

286

É evidente que os axiomas $\underline{D}^*$ são uma consequência dos axiomas $\underline{D}$. Vamos agora demonstrar que os axiomas D são uma consequência dos axiomas D^*; Para isso substituindo na desigualdade precedente y por x, vem

$$d(x, x) \leq d(x, z) + d(x, z)$$

ou

$$0 \leq 2\ d(x, z)$$

donde

$$\boxed{d(x, z) \geq 0 \quad (\text{axioma } D_2)}$$

Substituindo agora, na desigualdade D_5^*, z por $\underline{x}$ vem:

$$d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x)$$

ou

$$(1) \qquad d(x, y) \leq d(y, x)$$

Consideremos a desigualdade análoga a D_5^*

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(x, z)$$

Substituindo z por x vem

$$(2) \qquad d(y, x) \leq d(y, x)$$

As desigualdades (1) e (2) mostram que

$$(3) \qquad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{axioma } D_4)$$

Finalmente o axioma D_5^* e a igualdade (3) mostram que o axioma D_5 é também verificado.

Resta-nos finalmente demonstrar D_1. Seja então $x = x'$

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$$

ou, em virtude de D_3^*

$$(4) \qquad d(x, y) \leq d(x', y)$$

Do mesmo modo se vê que

$$d(x', y) \leq d(x', x) + d(x, y)$$

287

ou

(5) $\quad d(x', y) \leq d(x, y)$

Das desigualdades (4) e (5) resulta

$$d(x, y) = d(x', y) \quad \text{c. q. d.}$$

Observação: Todo o conjunto abstracto é um espaço ($\underline{D}$) se se define a distância entre dois dos seus elementos x e y como sendo igual a 1 se $x \neq y$ e igual a zéro se $x = y$. Pelo contrário em todos os espaços (D) que desempenham um papel importante na Análise Moderna a distância $d(x, y)$ toma um conjunto de valores denso no intervalo $(0, +\infty)$

13 - Espaços não distanciados. A noção de igualdade desempenha um papel importante na definição de distância com a qual está intimamente relacionada - é o que acontece por exemplo no axioma D_3^* de Lindenbaum. Não admira portanto que existam espaços não distanciados em relação a uma noção de igualdade que possam ser consideradas como espaços distanciados quando se modifica convenientemente a noção de igualdade. É o que acontece sempre que se pode fazer corresponder a cada par ordenado (x, y) de elementos de $\underline{E}$ num número real $d(x, y)$ satisfazendo às seguintes condições:

1º) $\quad d(x, x) = 0$

2º) $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Nestas condições $\underline{d(x, y) = 0}$ não implica que $x = y$ (1). Seja $\underline{x_0 \in E}$ e $\underline{X_0}$ o conjunto dos elementos $\underline{x \in E}$ tais que:

$$d(x_0, x) = 0$$

a que daremos o nome de classe gerada por x_0

(1) Para um espaço nestas condições são verificadas ainda as propriedades D_2) $d(x, y) \geq 0$, D_4) $d(x, y) = d(y, x)$ e D_1) Se $x = x'$ e $y = y'$ $\quad d(x, y) = d(x', y')$

2 88

Nestas condições vamos demonstrar o seguinte

Lema I. Se $x'_0 \in X_0$ e $x''_0 \in X$ será $d(x'_0 \;\; x''_0)=0$

Com efeito

$$d(x'_0, x''_0) \leqslant d(x'_0, x_0) + d(x''_0, x_0)$$

e portanto

$$d(x'_0, x''_0) \leqslant 0$$

logo

$$d(x'_0, x''_0) = 0 \quad \text{c. q. d.}$$

Nestas condições se x'_0 pertence à classe X_0 gerada por x_0, todo o elemento de X_0 pertence ainda à classe gerada por x'_0.

Lema II. Se duas classes X_0 e X_1 têm um elemento comum essas duas coincidem. Seja α um elemento comum a X_0 e X_1 então será

$$d(x_0, \alpha) = d(x_1, \alpha)$$

$$d(x_0, x_1) \leqslant d(x_0, \alpha) + d(x_1, \alpha)$$

logo

$$d(x_0, x_1) = 0$$

isto é x_1 pertence à classe X_0 e x_0 pertence à classe X_1.
Vamos agora mostrar que todo o elemento da classe X_1 pertence à classe X_0. Seja β_1 um elemento qualquer da classe X_1 como x_0 pertence também à classe X_1 podemos afirmar, em virtude do lema I, que $d(x_0, \beta_1)$, isto é, β_1 pertence à classe X_0.
Do mesmo modo se demonstra que todo o ponto de X_0 pertence à classe X_1 c. q. d.

Corolário. Se $d(x_0, x_1) \neq 0$, a distância de um ponto qualquer α_0 da classe X_0 a um ponto qualquer α_1 da classe X_1 é também diferente de zéro. com efeito se assim não fôsse seria $d(\alpha_0, \alpha_1) = 0$ e portanto α_1 pertenceria à classe gerada por α_0, isto é, α_1 pertenceria à classe X_0 e então X_0 e X_1 seriam

289

idênticos, e portanto $d(x_0, x_1) = 0$, o que é impossível por hipótese.

Lema III. Se $k = d(x_0, x_1) \neq 0$ qualquer que sejam os pontos $\alpha_0 \in x_0$ e $\alpha_1 \in x_1$ é

$$d(x_0, x_1) = d(\alpha_0, \alpha_1)$$

com efeito

$$d(\alpha_0, x_1) \leq d(\alpha_0, x_0) + d(x_1, x_0)$$

como

$$d(\alpha_0, x_0) = 0$$

$$(1) \quad \boxed{d(\alpha_0, x_1) \leq d(x_1, x_0)}$$

Por outro lado

$$d(x_1, x_0) \leq d(x_1, \alpha_0) + d(x_0, \alpha_0)$$

e portanto

$$(2) \quad \boxed{d(x_1, x_0) \leq d(x_1, \alpha_0)}$$

De (1) e (2) resulta:

$$(3) \quad \boxed{d(x_1, x_0) = d(\alpha_0, x_1)}$$

Finalmente de:

$$d(\alpha_0, \alpha_1) \leq d(\alpha_0, x_1) + d(\alpha_1, x_1)$$

tira-se

$$(4) \quad \boxed{d(\alpha_0, \alpha_1) \leq d(\alpha_0, x_1)}$$

e de

$$d(\alpha_0, x_1) \leq d(\alpha_0, \alpha_1) + d(x_1, \alpha_1)$$

tira-se

$$(5) \quad \boxed{d(\alpha_0, x_1) \leq d(\alpha_0, \alpha_1)}$$

Finalmente de (3), (4) e (5) resulta

$$\boxed{d(\alpha_0, \alpha_1) = d(x_0, x_1)} \quad \text{c. q. d.}$$

Podemos agora definir em E uma nova relação de igualdade,

290

a que daremos o nome de equivalência, da seguinte maneira:

Definição. Diremos que dois elementos x e y de E são equivalentes e escreveremos $x \sim y$ leia-se x equivalente a y se

$$d(x, y) = 0$$

Em virtude dos lemas precedentes é evidente que

I_1 - $x \sim x$

I_2 - Se $x \sim y$ será $y \sim x$

I_3 - Se $x \sim y$ e $y \sim z$ será $x \sim z$

Nestas condições o espaço (E) ser considerado como um espaço distanciado relativamente ~~em relação~~ à relação de equivalência; com efeito, são verificados os seguintes axiomas

Axioma D_3^* $d(x, y) = 0$ equivale a $x \sim y$. Se $x \sim y$ é por definição $d(x, y) = 0$, reciprocamente se $d(x, y) = 0$ é $x \sim y$

Axioma D_5^*. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Exemplo. O conjunto E das funções $f(x)$ de uma variavel real definidos no intervalo $(0, 1)$ cujo módulo é de quadrado somável, isto é, tais que

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty$$

formam um espaço distanciado, quando se define a distância $d(f, g)$ de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ pela condição

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx$$

Mas para isso é necessário modificar a definição vulgar de igualdade de duas funções visto que:

$$(1) \qquad \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$$

não implica que $f(x) = g(x)$

Quando a condição (1) fôr verificada diremos que $f(x)$ e $g(x)$ são equivalentes e escreveremos $f(x) \sim g(x)$ 91

É claro que nêste caso $f(x)$ e $g(x)$ diferem apenas sôbre um conjunto de pontos do intervalo $(0,1)$ de medida nula.

14-c - Um espaço (D) é evidentemente um espaço (V) quando se definem as vizinhanças de um ponto a como sendo o conjunto de pontos b do espaço considerado que verificam a condição

$$d(a, b) \leq r$$

(esfera de centro a e de raio r).

Então E é um espaço de Hausdorff.

Se convencionarmos que

$$\lim_{n = \infty} a_n = a$$

significa que

$$\lim_{n = \infty} d(a, a_n) = 0$$

podemos considerar E como um espaço L^*.

Os espaços (D) gosam de um grande número de propriedades do plano Euclideano que não nos interessa nêste momento considerar.

A determinação das condições necessárias e suficientes a que deve satisfazer um espaço ~~um espaço~~ topológico determinado para que êle seja um espaço (D) (problema da metrização) é uma das questões mais importantes da topologia.

Entre os espaços (D) são particularmente importantes os chamados espaços completos, isto é, aqueles para os quais se pode afirmar que uma sucessão a_n convergente [isto é que verifica a condição $\lim_{m=\infty} d(a_n, a_m) = 0$] tende necessàriamente para um limite. [isto é: existe no espaço considerado um elemento a tal que

$$\lim_{n = \infty} d(a_n, a) = 0 \;]$$

292

CAPITULO IV

Análise Abstracta ou Análise Geral

§1-Espaços algébrico-topológicos

1-**Definição.** A Análise Abstracta é um dos capítulos mais recentes da matemática moderna, visto que ela se pode considerar ainda em plena formação. Os resultados já obtidos, embora muito numerosos, resolvem apenas uma pequena parte dos problemas fundamentais da Análise Abstracta.

Para podermos definir o objectivo da Análise Abstracta, ou Análise Geral na terminologia do seu fundador o professor M. Frechet, necessitamos de introduzir um certo número de noções o que passamos a fazer.

Diremos que o conjunto abstracto E é um espaço algébrico-topológico quando E fôr simultâneamente um espaço algébrico e um espaço topológico, isto é quando forem definidas em E uma álgebra $\mathfrak{A}$ e uma topologia $\mathfrak{T}$.

Para indicarmos que E é um espaço algébrico-topológico usaremos a notação:

$$E(\mathfrak{A}, \mathfrak{T})$$

Trata-se portanto de uma noção extremamente geral, que pode dar origem a um conjunto numeroso de espaços algébrico-topológicos particulares que se obtêm especificando a natureza de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{T}$.

Tal e qual como acontece na Álgebra Abstracta e na Topologia tratando-se de uma noção extremamente geral é natural que um espaço nestas condições não gose de propriedades muito numerosas, e nestas condições seremos levados em breve a particularisar a álgebra $\mathfrak{A}$ e a topologia $\mathfrak{T}$ de modo a obtermos os espaços algébrico-topológicos mais importantes nas aplicações. Notemos por outro lado que a definição que acabamos de dar não estabelece nenhuma relação entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{T}$; ora acontece precisamente que na Análise Clássica os espaços mais importantes são sempre espaços em que exist

93
2

te uma correlação entre a álgebra e a topologia do espaço considerado. Em todo o caso a noção que acabamos de dar de espaço algébrico-topológico, permite-nos definir com todo o rigor qual é o objectivo da Análise geral.

2-Topo-isomorfismo. Dados dois espaços algébrico-topológicos E $(\mathfrak{A}, \mathfrak{T})$ e E$'(\mathfrak{A}', \mathfrak{T}')$ diremos que êles são topo-isomorfos quando existir uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos E e E$'$ que seja simultâneamente um isomorfismo entre E $(\mathfrak{A})$ e E$'(\mathfrak{A}')$ e uma homeomorfia entre ~~Entre~~ E $(\mathfrak{T})$ e E$'(\mathfrak{T}')$. Para indicar êste facto escreveremos:

$$E(\mathfrak{A}, \mathfrak{T}) \cong E'(\mathfrak{A}', \mathfrak{T}')$$

É claro que a relação de topo-isomorfismo goza de todas as propriedades da relação de igualdade.

É conveniente notarmos que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ devem conter o mesmo número de operações algébricas.

3 - Objectivo da Análise Geral. A Análise geral estuda as propriedades dos espaços algébrico-topológicos que se mantêm invariantes quando se passa de um espaço algébrico-topológico para outro que lhe seja topo-isomorfo.

Nestas condições podemos dizer que as noções e as propriedades de que se ocupa a Análise Geral são aquelas que se podem enunciar recorrendo apenas às noções primitivas da Álgebra e da Topologia (a saber: $a = b$, $a \in E$, $c = a \odot b$ e ponto de acumulação ou conjunto de inclusão etc.) e às funções proposicionais da lógica formal.

É fácil de verificar que o conjunto dos topo-isomorfismos formam um grupo em relação à multiplicação dos topo-isomorfismos. (a definição de multiplicação é análoga à que demos para as equivalências, isomorfismos e homeomorfismos) . A êste grupo dá-se o nome de grupo dos topo-isomorfismos, que é simultâneamente um ~~xxxxxxxxxxx~~ sub-grupo do grupo dos isomorfismos e do grupo dos homeomorfismos, e portanto do grupo das equivalências.

94

A Análise Geral apresenta-se portanto como lògicamente subordinada à Álgebra Abstracta e à Topologia Abstracta e portanto à teoria dos Conjuntos Abstractos .

É evidente que entre as propriedades de E invariantes por topo-isomorfismo figuram certamente tôdas as propriedades algébricas de E e tôdas as propriedades topológicas de E. Parece portanto à primeira vista que a Análise Abstracta se limitaria a estudar isoladamente o espaço E quer como espaço algébrico quer como espaço topológico. Na realidade não é assim porque existem noções que não podem ser formuladas isoladamente na Álgebra Abstracta ou na Topologia Abstracta, que só têm sentido num espaço algébrico-topológico.

Daremos o nome de analíticas a tôdas as noções que estiverem nestas condições; e são elas que devem ser consideradas como as noções de que se ocupa verdadeiramente a Análise Abstracta.

Uma proposição será considerada como uma proposição de Análise Abstracta quando no seu enunciado figura necessàriamente uma noção analítica.

4 - Dimensão algébrica de um espaço. Vamos agora introduzir a noção de dimensão algébrica de um espaço algébrico-topológico.

Definições.

I - Diremos que dois espaços algébrico-topológicos A e B têm a mesma dimensão algébrica se existir um topo-isomorfismo entre A e um sub-conjunto de B e entre B e um sub-conjunto de A.

Então escreveremos: $d_a (A) = d_a (B)$

II 6 Diremos que a dimensão algébrica de um espaço A é inferior à dimensão algébrica de B, se existir um topo-isomorfismo entre A e um sub-conjunto de B e não existir nenhum topo-isomorfismo entre B e um sub-conjunto de A . Então escreveremos:

$$d_a (A) < d_a (B)$$

III 6 Diremos que a dimensão algébrica de um espaço A é maior que a dimensão algébrica de B se fôr:

$d_\alpha(B) < d_\alpha(A)$ e então escreveremos $d_\alpha(A) > d_\alpha(B)$?

IV - Diremos que as dimensões algébricas dos espaços A e B são incomparáveis, se não existir nenhum topo-isomorfismo entre B e um sub-conjunto de B, nem entre B e um sub-conjunto de A.

Se dois espaços A e B têm a mesma dimensão algébrica, êsses dois espaços têm necessàriamente a mesma potência, o mesmo tipo algébrico e o mesmo tipo de dimensão à Fréchet.

Se dois espaços são topo-isomorfos êles têm necessàriamente a mesma dimensão algébrica, mas a recíproca desta proposição não deve ser verdadeira.

Como exemplo de dois espaços com a mesma dimensão algébrica, podemos indicar o conjunto dos números complexos e o conjuntos dos vectores de um plano que têm por origem um ponto fixo O, quando nêsses conjuntos se dão as definições habituais de adição e limite de uma sucessão de números ou de vectores. A dimensão algébrica do corpo dos numeros reais é inferior à dimensão algébrica do corpo dos numeros complexos.

A relação de igualdade e desigualdade entre dimensões algébricas goza de todas as propriedades que indicaremos no nº 13 do capítulo I, para o caso da noção de potência de um conjunto.

Mais adiante indicaremos para certas categorias de grupos abelianos topológicos um teorema de estrutura análoga ao teorema de Cantor-Bernstein na Álgebra e ao teorema de Banach na Topologia.

Daremos o nome ~~as propriedades que se mantêm invariantes~~ de propriedades algébrico-dimensionais às propriedades que se mantêm invariantes quando se passa de um espaço para outro de dimensões algébrica igual e daremos o nome de propriedades topo-isomorfas aquelas que se mantêm invariantes quando se passa de um espaço para outro que seja topo-isomorfo ao primeiro.

96

2

§ 2- Espaços Analíticos

5- <u>Definição</u>. Na definição que demos de um espaço algébrico-topológico E ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Z}$) não estabelecemos nenhuma relação entre a álgebra e a topologia do espaço E.

Suponhamos que em E é definida numa única operação, por exemplo uma multiplicação e que sob o ponto de vista topológico E é um espaço (V).

A cada par ~~de elementos~~ (a,b) de elementos de E a operação considerada faz corresponder um outro elemento de E, $c = a\,b$. $\mathfrak{A}$ define portanto em todo o espaço E uma função $c = f(a,b) = a\,b$ de dûas variáveis cujo contra-domínio está contido em E.

Diremos que E ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Z}$) é um <u>espaço analítico</u> se $f(a,b)$ é uma função contínua do ponto (a,b), quaisquer que sejam os pontos <u>a</u> e <u>b</u> de E.

Sejam A e B dois sub-conjuntos de E, representaremos pela notação $A\,B$ o conjunto de todos os produtos de um elemento de A por um elemento de B; se B se reduz a um único elemento <u>b</u> o mesmo conjunto será representado pela notação <u>$A \cdot b$</u>. Se fôr $A = V(a)$ e $B = V(b)$ porêmos $A\,B = V(a)\,V(b)$.

Nestas condições para que E seja um espaço analítico é necessário e suficiente que dada uma vizinhança qualquer $V(c)$ de $c = f(a,b) = a\,b$ existam duas vizinhanças $V(a)$ e $V(b)$ tais que

$$V(a)\,V(b) \subset V(c)$$

Fica assim estabelecida ~~xxxx~~ uma connexão entre a álgebra e a topologia de E.

Vamos agora indicar algumas

6-<u>Propriedades dos espaços analíticos</u>. Seja A um sub-espaço algébrico de E, A' o seu conjunto derivado e $\overline{A} = A + A'$.

<u>Teoremal1-Se A é um sub-espaço algébrico de E, $\overline{A} = A + A'$ será ainda um sub-espaço algébrico de E.</u> Temos que provar que se $a \in \overline{A}$ e $b \in \overline{A}$ será $a\,b \in \overline{A}$.

<u>1º caso</u>. suponhamos que $a \in A$ e $b \in A$ então $a\,b \in A$ por hipótese, e portanto $a\,b \in \overline{A}$.

97

<u>2º caso</u>. Suponhamos que $a \in A$, $b \in A'$ e $b \notin A$.

Vamos mostrar que $a\,b$ é um elemento de $\overline{A}$; basta para isso provar que $a\,b \in A'$. Seja dada uma vizinhança qualquer $V(a\,b)$; por hipótese existem $V(a)$ e $V(b)$ tais que:

$$V(a)\,V(b) \subset V(a\,b)$$

em particular

$$a\,V(b) \subset V(a\,b)$$

Ora qualquer que seja $V(b)$

$$V(b) \supset B = [V(b) \wedge A] \neq 0$$

visto que <u>b</u> é um ponto de acumulação de A. Note-se que B é um sub-conjunto de A e o mesmo acontece a

$$a\,B \subset a\,.\,V(b)$$

Portanto

$$a\,B \subset V(a\,b)$$

isto é: qualquer vizinhança de <u>a b</u> contém pontos de A e portanto $a\,b \in A'$ c. q. d. . Do mesmo modo se mostrava que se $a \in A'$, $a \notin A$ e $b \in A$: $a\,b \in A'$ e portanto a $\overline{A}$.

<u>3º caso</u>. Suponhamos finalmente que $a \in A'$, $b \in A'$, $a \notin A$ e $b \notin A$. Mostremos que $a\,b \in A'$.

Dada a vizinhança $V(a\,b)$ existem $V(a)$ e $V(b)$ tais que

$$V(a)\,V(b) \subset V(a\,b)$$

sejam

$$B_1 = V(a) \wedge A \neq 0$$

$$B_2 = V(b) \wedge A \neq 0$$

Será

$$B_1\,B_2 \subset A$$

e

$$B_1\,B_2 \subset V(a)\,V(b) \subset V(a\,b)$$

isto é: qualquer vizinhança de a b contém pontos de A; logo $a\,b \in A'$ e portanto $a\,b \in \overline{A}$. Podemos mesmo afirmar em face da demonstração anterior que :

<u>Corolário</u> . <u>Se A é um sub-espaço algébrico de um espaço analítico E,</u>

28

o conjunto derivado $A' = \mathcal{C}(A)$ é ainda um sub-espaço algébrico de E .
Não poderemos em regra afirmar que o espaço $\bar{A} = A + A'$ seja um conjunto topològicamente fechado a não ser que E seja, por exemplo, um espaço acessível ou um espaço de Hausdorff, relativamente à família de vizinhanças que definem a topologia em E; quando assim fôr o conjunto A goza das seguintes propriedades:

1º) $\bar{A}$ é algèbricamente fechado, isto é: o produto de dois elementos de $\bar{A}$ é ainda um elemento de $\bar{A}$.

2º) $\bar{A}$ é topològicamente fechado, isto é: os pontos limites de $\bar{A}$ são ainda pontos de $\bar{A}$.

Para exprimir êste facto diremos que $\bar{A}$ é a variedade fechada gerada pelo sub-espaço algébrico A . Uma variedade fechada é portanto um sub-espaço algébrico que é topològicamente fechado. São êstes os sub-conjuntos que mais interessam, no estudo dum espaço analítico.

7 - Algebrização das variedades fechadas.

É possível obter uma algebrização das variedades fechadas contidas num espaço analítico E , da seguinte maneira:

Dadas duas variedades fechadas A e B dá-se o nome de intersepção das duas variedades ao conjunto $A \wedge B$.

Teorema. A intersepção de duas variedades fechadas é ainda uma variedade fechada.

É evidente visto que 1º) $A \wedge B$ é um sub-espaço algébrico de E . 2º) $A \wedge B$ é fechado visto que a intersepção de dois conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado.

A intersepção de variedades fechadas, sendo definida como a intersepção de dois conjuntos, goza portanto de todas as propriedades da intersepção de conjuntos.

Dá-se o nome de variedade fechada gerada por um conjunto A de elementos de E à intersepção F de todas as variedades fechadas que contêm A , po-

99

demos chamar-lhe a menor das variedades fechadas que contêm A. No caso em que A é um sub-espaço algébrico de E nem sempre se pode afirmar que $F = E + E'$; podemos indicar como exemplo o conjunto A das funções contínuas; nêste caso F é o conjunto de tôdas as funções de Baire. (Note-se que A é um grupo abeliano e que F é um espaço $\mathcal{L}$). Porém se E é um espaço de Hausdorff $F = E + E'$.

O produto A B de duas variedades fechadas A e B não é em geral uma variedade fechada, e seria esta a algebrização mais importante. Mais adiante indicaremos para os grupos abelianos uma algebrização conveniente das variedades fechadas.

Em tôdo o caso nós podemos demonstrar que

$$A' B' \subset (A B)'$$

Com efeito sejam a e b dois pontos limites que pertencem respectivamente a A' e B'.

Então quaisquer que sejam $V(a)$ e $V(b)$ será

$$A_1 = V(a) \wedge A - (a) \neq 0$$

$$B_1 = V(b) \wedge B - (b) \neq 0$$

Consideremos o elemento a b e uma vizinhança qualquer $V(ab)$, então existem $V(a)$ e $V(b)$ tais que:

$$V(a)\ V(b) \subset V(ab)$$

por outro lado:

$$A_1 \subset A \qquad A_1 \subset V(a)$$

$$B_1 \subset B \qquad B_1 \subset V(b)$$

logo

$$A_1 B_1 \subset A B$$

$$0 \neq A B \subset V(a)\ V(b) \subset V(ab)$$

e portanto existem pontos de A B em qualquer vizinhança $V(ab)$, c. q. d.

200

Em geral não se verifica a condição

$$A' B' = (A B)'$$

isto é: a derivação não é destributiva em relação à multiplicação de conjuntos. Nos casos em que esta circunstância se der é de esperar que apareçam simplificações importantes.

2/101

§3- Grupos topológicos.

8-

8-Definição-Se um grupo G fôr um espaço(V) diremos que é é um grupo topológico se fôrem verificados os seguintes dondições:

G_1 - G é um espaço de Hausdorff.

G_2 - a b é uma função contínua do ponto (a,b) quaisquer que sejam a e b.

G_3 - a^{-1} é uma função contínua de a.

Estas três condições podem resumir-se nas seguintes:

G^*- G é um espaço de Hausdorff.

G^{**}- a função $f(a\ b) = a^{-1}b$ é contínua.

Com efeito para b = e será: $f(a) = a^{-1}$ uma função contínua e portanto G_3 é verificado.

Seja A um sub-conjunto qualquer de G, representemos por A^{-1} o conjunto dos elementos a^{-1} onde $a \in A$. Para que G_1 e G_2 sejam verificadas é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as condições:

H_1- Dada a vizinhança V(a b) existem duas vizinhanças V(a) e V(b) tais que

$$V(a)\ \ V(b) \subset V(a\ b)$$

H_2 -Dada a vizinhança $V(a^{-1})$ existe V(a) tal que

$$V(a)^{-1} \subset V(a^{-1})$$

A condição H_1 exprime que G é um espaço analítico.

Vamo-nos ocupar nêste parágrafo exclusivamente dos grupos abelianos, mas alguns dos resultados que vamos obter estendem-se sem dificuldades aos grupos não abelianos.

9-Grupos abelianos topológicos Como vamos tratar de grupos abelianos ~~xxxxxxxxxxx~~ adoptaremos a notação aditiva (a + b) para representar a operação do grupo. Suponhamos então que G é um grupo abeliano topológico, e que G é fechado.

Para um grupo abeliano as condições H_1 e H_2 tomam a forma:

H_1 - Dada a vizinhança $V(a+b)$ existem duas vizinhanças $V(a)$ e $V(b)$ tais que

$$V(a) \dot{+} V(b) \subset V(a+b)$$

H_2 - Dada a vizinhança $V(-a)$ existe $V(a)$ tal que

$$-V(a) \subset V(-a)$$

9 - Variedades fechadas. Diremos que G_1 é uma ~~variedade~~ fechada de G se G_1 fôr um grupo fechado.

Teorema 1 - Se G_1 é um sub-grupo de G, o conjunto $\overline{G}_1 = G_1 + G_1'$ é uma variedade fechada.

Em primeiro logar $\overline{G}_1$ é um conjunto fechado porque G é um espaço de Hausdorff.

Já mostramos que se a e b são elementos de $\overline{G}_1$, $a + b$ ~~não~~ é ainda um elemento de $\overline{G}_1$ (veja nº6).

Resta-nos mostrar que se $a \in \overline{G}_1$ é $(-a) \in \overline{G}_1$.

1º caso. Se a e um elemento ~~de xxxxpertante~~ do grupo G_1, $(-a)$ é ainda um elemento de G_1 e portanto de $\overline{G}_1$.

2º caso. Suponhamos que, a é um elemento de G_1' que não pertence a G_1. Então, dada uma vizinhança qualquer $V(a)$ o conjunto $H = V(a) \wedge G_1$ não é vazio. (Veja continuação na pagina seguinte)

~~Abstracto de Hilbert.~~

10 - Grupos abelianos perfeitamente decomponiveis. Um grupo abeliano topológico e fechado G diz-se decomponivel quando dada uma variedade fechada qualquer $G_1 \subset G$ existe uma variedade fechada G_2 tal que ~~xxxxxxxxxxxxxx~~ G seja a soma directa de G_1 e G_2 isto é tal que:

$$G = G_1 \oplus G_2 \quad \text{ou} \quad G \ominus G_1 = G_2$$

Diremos então que G_2 é a variedade complementar de G_1.

Note-se que são verificadas as seguintes condições:

103

Dada uma vizinhança qualquer de $(-a)$, a saber $V(-a)$ existe uma vizinhança $V(a)$ tal que

$$-V(a) \subset V(-a)$$

Como H é um sub-conjunto de $V(a)$, $-H$ é um sub-conjunto de $-V(a)$ e portanto

$$-H \subset V(-a)$$

Ora os elementos de $-H$ são elementos de G_1 e portanto $(-a)$ é ponto limite de G_1, logo pertence a G_1' e portanto a $\overline{G_1}$, c. q. d.

Sería agora fácil de reconhecer que

<u>Teorema 2</u> - <u>A intersepção de duas variedades fechadas é uma variedade fechada</u>. Dá-se o nome de <u>variedade fechada gerada por um conjunto A</u> de elementos de E à intersepção de todas as variedades fechadas que contêm A.

A soma $A \dot{+} B$ de duas variedades fechadas não é em regra uma variedade fechada; podem-se indicar exemplos no espaço ~~espaço~~ abstracto de Hilbert.

(continua no nº 10 da pagina anterior)

704

1º) $G = G_1 \dot{+} G_2$

2º) $G_1 \wedge G_2 = \Theta$

3º) Todo o elemento $a \in G$ decompõe-se de uma única maneira sob a forma:

$$(1)\quad a = a_1 + a_2$$

onde

$$a_1 \in G_1 \text{ e } a_2 \in G_2$$

4º) Se $a = \lim\limits_{n=\infty} a_n$ e $b = \lim\limits_{n=\infty} b_n$ onde a_n e b_n são elementos pertencentes respectivamente a G_1 e G_2 será:

$$a + b = \lim_{n=\infty} (a_n + b_n)$$

Nota. Diremos que o conjunto $A \subset G$ é soma directa das variedades fechadas A_1 e A_2 se

1º) $A = A_1 \dot{+} A_2$

2º) $A_1 \wedge A_2 = \Theta$

3º) Todo o elemento $a \in G$ decompõe-se de uma maneira única sob a forma $a = a_1 + a_2$

onde $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$

É claro que A é um sub-grupo abeliano de G em virtude de 1º).

Mas não podemos afirmar que A é um conjunto fechado, isto é em regra

$$\bar{A} = A + A' \neq A.$$

Compreende-se assim a importância das considerações seguintes.

Seja <u>a</u> um elemento qualquer de $G = G_1 \oplus G_2$ e

$$(1)\quad a = a_1 + a_2$$

Consideremos uma vizinhança qualquer $V(a)$; cada elemento de $V(a)$ admite uma decomposição da forma (1). Seja $V_1(a)$ o conjunto dos a_1 e $V_2(a)$ o conjunto dos a_2.

Diremos que o grupo G é <u>perfeitamente decomponível</u> quando:

1º) <u>G fôr decomponível</u>.

2º) <u>Qualquer que seja a decomposição $G = G_1 \oplus G_2$ e dado um elemento a qualquer de G</u>

125

$$a = a_1 + a_2 \qquad a_i \in G_i \ (i=1,2)$$

e duas vizinhanças quaisquer $V(a_1)$ e $V(a_2)$ existe uma vizinhança $V(a)$ tal que

$$V_1(a) \subset V(a_1)$$
$$V_2(a) \subset V(a_2)$$

nestas condições vamos demonstrar o seguinte:

Teorema 3- Se G é perfeitamente decomponivel; qualquer que seja a decomposição $G = G_1 \oplus G_2$ a operação de derivação de conjunto é distributiva em relação à adição dos sub-conjuntos que pertencem respectivamente a G_1 e G_2, isto é se:

$$A_1 \subset G_1 \quad e \quad A_2 \subset G_2$$

será

$$\boxed{(A_1 \dot{+} A_2)' = A_1' \dot{+} A_2'}$$

Já mostrámos, no nº 7, que:

$$A_1' \dot{+} A_2' \subset (A_1 \dot{+} A_2)'$$

Resta-nos mostrar portanto que

$$(A_1 \dot{+} A_2)' \subset A_1' \dot{+} A_2'$$

Seja a um ponto limite de $A_1 \dot{+} A_2$, então dada $V(a)$ o conjunto

$$B = V(a) \wedge (A_1 \dot{+} A_2)$$

não é vazio, qualquer que seja $V(a)$. Seja $a = a_1 + a_2$

Dadas as vizinhanças $V(a_1)$ e $V(a_2)$ existe uma vizinhança $V(a)$ tal que:

$$V_1(a) \subset V(a_1)$$
$$V_2(a) \subset V(a_2)$$

Seja b um elemento qualquer de B e $b = b_1 + b_2$; o conjunto B_1 dos elementos b_1 e o conjunto B_2 dos elementos b_2 não são vazios e

$$B_1 \subset V_1(a)$$
$$B_2 \subset V_2(a)$$

Isto significa que em qualquer vizinhança de a_1 existem pontos de A_1 e portanto a_1 é ponto limite de A_1; do mesmo modo se vê que a_2 é ponto

106

limite de A_2.

Nestas condições

$$a_1 \in A'_1$$
$$a_2 \in A'_2$$

logo

$$a = a_1 + a_2 \in A'_1 \dot{+} A'_2 \qquad \text{c. q. d.}$$

Podemos mesmo afirmar que:

Corolário. Se G é perfeitamente decomponível ; e dada uma decomposição qualquer $G = G_1 \oplus G_2$ se uma sucessão de elementos $a^{(n)}$ tendem para a e se puzermos

$$a^{(n)} = a_1^{(n)} + a_2^{(n)}$$
$$a = a_1 + a_2$$

então podemos afirmar que:

$$a_1 = \lim_{n=\infty} a_1^{(n)}$$
$$a_2 = \lim_{n=\infty} a_2^{(n)}$$

Daremos daqui por diante o nome de variedades fechadas aos sub-grupos de G que são topològicamente fechados

Dados duas varieades fechadas G' e G'' contidos em G, diremos que elas estão em relação de soma directa, se existe uma decomposição de G,

$$G = G_1 \oplus G_2$$

tal que

$$G' \subset G_1$$
$$G'' \subset G_2$$

Então $H = G' \dot{+} G''$ é uma variedade fechada de G e podemos escrever

$$H = G' \oplus G''$$

isto é:

Teorema 4- Se duas variedades fechadas G' e G'' estão em relação de soma directa existe uma variedade fechada H que é a soma directa de G' e G''.

Este teorema é uma consequência dos resultados anteriores

Definição: Diremos que dois conjuntos A e B estão em relação de soma directa

107
7

quando existir uma decomposição de G

$$G = G_1 \oplus G_2$$

tal que:

$$A \subset G_1$$
$$B \subset G_2$$

Então podemos enunciar o seguinte :

Teorema 5. Se dois conjuntos A e B estão em relação de soma directa, as menores variedades fechadas geradas respectivamente por A e B estão em relação de soma directa.

Resultado que é evidente se atendermos a que as menores variedades fechadas geradas por A e B estão respectivamente contidas em G_1 e G_2 e estão portanto em relação de soma directa.

Se A fôr um sub-grupo de G representaremos por $\mathcal{V}(A)$ a menor variedade fechada gerada por A, é claro que no nosso caso como G é um espaço de Hausdorff, será:

$$\mathcal{V}(A) = \overline{A} = A + A'$$

Teorema 6- Se dois sub-grupos A e B de G estão em relação de soma directa será

$$\mathcal{V}(A \dot{+} B) = \mathcal{V}(A) \oplus \mathcal{V}(B)$$

Em primeiro logar $\mathcal{V}(A)$ e $\mathcal{V}(B)$ estão em relação de soma directa em virtude do teorema 5.

Existe portanto uma variedade fechada H tal que

$$H = \mathcal{V}(A) \oplus \mathcal{V}(B)$$

Resta-nos portanto mostrar que

$$H = \mathcal{V}(A \dot{+} B)$$

ora

$$\mathcal{V}(A \dot{+} B) = (\overline{A \dot{+} B}) = (A \dot{+} B) + (A \dot{+} B)'$$

108

ora em virtude do teorema 3

$$(A\dot{+}B)' = A' \dot{+} B'$$

e portanto

(1) $$\mathcal{V}(A\dot{+}B) = (A\dot{+}B) + (A'\dot{+}B')$$

Por outro lado

$$\mathcal{V}(A) = A + A'$$

$$\mathcal{V}(B) = B + B'$$

e

$$H = \mathcal{V}(A) \oplus \mathcal{V}(B) = (A + A') \dot{+} (B + B')$$

e portanto H é formado pelo conjunto dos elementos, que pertencem a:

$$A\dot{+}B$$

$$A'\dot{+}B'$$

$$A\dot{+}B'$$

$$A'\dot{+}B$$

Logo

(2)

$$H = (A\dot{+}B) + (A'\dot{+}B') + (A\dot{+}B') + (A'\dot{+}B)$$

Comparando (1) e (2) vê-se imediatamente que:

$$\mathcal{V}(A\dot{+}B) \subset H$$

Para provarmos o teorema resta-nos mostrar que os elementos de $(A\dot{+}B')$ e $(A'\dot{+}B)$ são ainda elementos de $(A\dot{+}B)$ ou $(A'\dot{+}B')$.

1º) Mostremos que os elementos de $(A\dot{+}B')$ são elementos de $(A\dot{+}B)$ ou de $(A'\dot{+}B')$

Com efeito, seja $a \in A$ e $b \in B'$ então $a + b$ é um elemento $(A\dot{+}B')$.

Por outro lado

$$b = \lim_{n=\infty} b^{(n)} \quad \text{onde } b^{(n)} \in B$$

logo

$$a + b = \lim_{n=\infty} (a + b^{(n)})$$

109

Ora

$$(a+b^{(n)}) \in A \dot{+} B$$

e então $a+b$ é limite de uma sucessão de elemento de $A\dot{+}B$ e portanto:

$$a+b \in (A\dot{+}B)' = (A'\dot{+}B')$$

De mesmo modo se mostrava que os elementos ~~xxxx~~ de $(A'\dot{+}B)$ são elementos de $(A'\dot{+}B')$.

Acabamos portanto de mostrar que

$$H = (A\dot{+}B) + (A'\dot{+}B')$$

e portanto c.q.d. que:

$$\mathcal{V}(A) \dot{+} \mathcal{V}(B) = \mathcal{V}(A\dot{+}B)$$

Resultado que se pode escrever sob a forma:

$$\overline{(A\dot{+}B)} = \overline{A}\dot{+}\overline{B}$$

Resultado que é válido para os sub-grupos de G que estão em relação de ~~so~~ soma directa. Note-se que a hipótese de que G é um grupo perfeitamente decomponivel intervém efectivamente na demonstração dêste teorema. Existe portanto uma conexão entre a relação de "fermeture" e a relação de soma directa análoga à relação da topologia abstracta:

$$\overline{(A+B)} = \overline{A}+\overline{B}$$

que desempenha um papel tão importante em topologia abstracta, veja Kuratowski [1] pag. 15 e seguintes.

Concebe-se assim que a noção de grupo abeliano topológico perfeitamente decomponivel desempenhe em Análise abstracta um papel importante.

<u>Teorema 7-Se A e B são dois grupos abelianos perfeitamente decomponiveis e se</u>

$$A = A_1 \oplus A_2$$

$$B = B_1 \oplus B_2$$

<u>onde A_1 e B_1, bem como A_2 e B_2 são topo-isomorfos, então A e B são ~~ainda~~ também topo-isomorfos.</u>

110
2

Com efeito sejam

$$B_1 = \varphi(A_1)$$
$$B_2 = \psi(A_2)$$

dois topo-isomorfismos. Seja

$$a = a_1 + a_2$$

onde

$$a \in A \;,\; a_1 \in A_1 \;,\; a_2 \in A_2$$

Consideremos a transformação definida em A

$$\Phi(a) = \varphi(a_1) + \psi(a_2) = b = b_1 + b_2$$

onde

$$b_1 = \varphi(a_1) \in B_1$$
$$b_2 = \psi(a_2) \in B_2$$

E fácil de vêr que $\Phi(a)$ transforma A em B e que existe a transformação inversa

$$\Phi^{-1}(b) = \varphi^{-1}(b) \neq \psi^{-1}(b_2)$$

Reconhece-se imediatamente que $\Phi(a)$ é um isomorfismo.

Demonstraremos agora que $\Phi(a)$ é uma transformação continua de A em B. Para isso seja b um ponto qualquer de B e V(b) uma vizinhança qualquer de de b. Consideremos a decomposição

$$b = b_1 + b_2$$

Por hipótese existem duas vizinhanças V(b) e V(b) tais que

$$V(b_1) \dotplus V(b_2) \subset V(b)$$

Sejam $V_1(b_1) = B \wedge V(b_1)$

$$V_2(b_2) = B_2 \wedge V(b_2)$$

Será ainda

$$V_1(b_1) \dotplus V_2(b_2) \subset V(b)$$

Seja

$$a = \Phi^{-1}(b)$$
$$a = a_1 + a_2$$

onde

111

$$a_1 = \varphi^{-1}(b_1)$$
$$a_2 = \psi^{-1}(b_2)$$

Como φ e ψ são funções continuas existem

$$V_1(a_1) \subset A \quad \text{e} \quad V_2(a_2) \subset A_2$$

tais que

$$\varphi[V_1(a_1)] \subset V_1(b_1)$$
$$\psi[V_2(a_2)] \subset V_2(b_2)$$

Por outro lado como A é perfeitamente decomponivel existe V(a) tal que

$$V_1(a) \subset V_1(a_1)$$
$$V_2(a) \subset V_2(a_2)$$

O que nos permite reconhecer imediatamente que

$$\Phi[V(a)] \subset V(b)$$

isto é que Φ é uma função continua de A em B. De mesmon modo se demonstrava que Φ^{-1} é uma função continua de B em A;

<u>Teorema 8</u> Se <u>um grupo abeliano G perfeitamente decomponivel é topo-(isomorfo ao grupo abeliano $H = \Phi(G)$ (onde Φ é um topo-isomorfismo)</u> e se

$$G = G_1 \oplus G_2$$

será

$$H = H_1 \oplus H_2$$

onde

$$H_1 = \Phi(G_1)$$
$$H_2 = \Phi(G_2)$$

A demonstração é imediata.

<u>Topologia induzida num ~~xxxxx~~ sub-grupo fechado</u>. Seja G_1 um sub-grupo re fechado contido em G, então $G = G_1 \oplus G_2$. É as vezes conveniente substituir as familias de vizinhanças dos elementos de G_1 por outras que só contenham elementos de G_1 e que constituam em G, uma familia equivalente à primeira. Seja V(a) uma vizinhança qualquer de $a \in G_1$; V(a) contém em regra pontos que não pertencem a G_1.

112

Seja $V_{(1)}(a) = G_1 \wedge V_1(a)$. Seja A um conjunto qualquer contido em G_1; se α é um ponto de acumulação de A em relação à familia de vizinhanças de V(a), α é ainda um ponto de acumulação de A em relação à familia de vizinhanças $V_{(1)}(a)$ e reciprocamente. Diremos que $V_{(1)}(a)$ são as vizinhanças induzidas em G_1, e que a topologia assim determinada em G_1 é induzida pela primeira.

<u>Teorema 9- Toda a variedade fechada G_1 de um grupo G perfeitamente decomponivel é ~~decomponivel~~ um grupo perfeitamente decomponivel.</u>

Seja G' um sub-grupo fechado de G_1 então existe G'' tal que

$$G = G' \oplus G''$$

Como G_1 contém G' será:

$$G_1 = G' \oplus (G_1 \wedge G'')$$

ora $G'_1 = G_1 \wedge G''$ é um sub-grupo fechado de G_1, logo existe G'_1 tal que

$$G_1 = G' \oplus G'_1$$

portanto G_1 é decomponível. Seja <u>a</u> um elemento qualquer de G_1, será

$$a = a' + a''$$

onde

$$a' \in G' \text{ e } a'' \in G''$$

Dadas as vizinhanças $V(a')$ e $V(a'')$ existe uma vizinhança $V(a)$ tal que

$$V'(a) \subset V(a')$$
$$V''(a) \subset V(a'')$$

onde $V'(a)$ e $V''(a)$ representam o conjunto dos componentes de V(a) segundo as variedades G e G.

É evidente que $a'' \in G'_1$. Seja:

$$V_1(a'') = V(a'') \wedge G_1$$
$$V_1(a') = V(a') \wedge G_1$$
$$V_1(a) = V(a) \wedge G_1$$

Na topologia induzida em G_1 <u>a</u>, <u>a</u>$'$ e <u>a</u>$''$ têm por vizinhanças V (a) e V (a) e $V_1(a'')$.

113
2

Seja por outro lado:

$$V_1'(a) = V''(a) \wedge G_1'$$

é claro que

$$V'(a) \subset V_1(a')$$

$$V_1'(a) \subset V_1(a'')$$

onde $V'(a)$ e $V_1'(a)$ representam o conjunto dos componentes de $V_1(a)$ segundo as variedades G' e G_1'; e portanto G_1 é perfeitamente decomponivel.

114

§ 4 - Dimensão algébrica dos grupos perfeitamente decomponíveis

12 - Estamos agora em condições de poder demonstrar o seguinte teorema:

Teorema. Se dois grupos abelianos A e B peefeitamente decomponíveis têm a mesma dimensão algébrica é possivel decompôr cada um dêles na soma directa de duas variedades fechadas respectivamente topo-isomorfas. Isto é: é possivel determinar duas decomposições:

$$A = A_1 \oplus A_2$$
$$B = B_1 \oplus B_2$$

tais que

$$A_1 \cong B_1$$
$$A_2 \cong B_2 .$$

Demonstração. Por hipótese A e B têm a mesma dimensão algébrica e portanto existe um topo-isomorfismo φ que transforma A num sub-conjunto de B, a saber $B^{(1)} = \varphi(A)$ e existe outro topo-isomorfismo ψ que transforma B num sub-conjunto de A, a saber $A^{(1)} = \psi(B)$. Por outro lado como A e B são topològicamente fechados, isto é, $A = \overline{A}$ e $B = \overline{B}$ será também $A^{(1)} = \overline{A^{(1)}}$ e $B^{(1)} = \overline{B^{(1)}}$ e portanto $A^{(1)}$ e $B^{(1)}$ são variedades fechadas contidas respectivamente em A e em B. Seja F_1 uma variedade fechada contida em A

$$(1) \qquad F_1 \subset A$$

teremos

$$(2) \qquad \varphi(F_1) \subset \varphi(A)$$

e

$$(3) \qquad F_1 \cong \varphi(F_1)$$

Do modo mesmo se F_2 é uma variedade fechada contida em B

$$(4) \qquad F_2 \subset B$$

115

teremos

$$(5) \qquad \psi(F_2) \subset \psi(B)$$

e

$$(6) \qquad F_2 \cong \psi(F_2)$$

Por outro lado como $\varphi(A)$ é variedade fechada contida em B

$$(7) \qquad \varphi(A) \subset B$$

de (2) e (7) resulta que

$$(8) \qquad \varphi(F_1) \subset B$$

e portanto

$$(9) \qquad \psi[\varphi(F_1)] \subset \psi(B)$$

e de (4), (5) e (6), resulta que

$$(10) \qquad \varphi(F_1) \cong \psi[\varphi(F_1)]$$

como por hipótese

$$(11) \qquad \psi(B) \subset A$$

de (4), (5), (8), (9) e (11) resulta que

$$(12) \qquad \psi[\varphi(F_1)] \subset A$$

De (3), (6) e (10) resulta que

$$(13) \qquad F_1 \cong \psi[\varphi(F_1)]$$

Ponhamos para simplificar a escrita

(F)   (F)

É claro que Φ sendo o produto de dois topo-isomorfismos é um é um topo-isomorfismo. As relações (12) e (13) mostram-nos que Φ transforma toda e qualquer variedade fechada F_1 contida em A numa outra variedade fechada $\Phi(F_1)$ contida em A e que é topo-isomorfa a F_1. Em resumo, se F_1 é uma variedade fechada contida em A, será:

$$F_1 \subset A$$

$$\Phi(F_1) \subset A$$

$$F_1 \cong \Phi(F_1)$$

116

onde $\Phi(F_1)$ é uma variedade fechada.

Podemos portanto ainda afirmar que

$$\Phi^2(F_1) = \Phi[\Phi(F_1)] \subset A$$

e

$$\Phi^2(F_1) \cong \Phi(F_1) \cong F_1$$

Duma maneira geral

$$\Phi^{(n)}(F_1) = \Phi[\Phi^{(n-1)}(F_1)] \subset A$$

e

$$\Phi^{(n)}(F_1) \cong F_1$$

onde $\Phi^{(n)}(F_1)$ é uma variedade fechada. Daqui resulta imediatamente que :

$$A \supset \Phi(A) \supset \Phi^2(A) \supset \dots \supset \Phi^{(n)}(A) \supset \dots$$

e que

$$A \cong \Phi^{(n)}(A)$$

Posto isto consideremos a variedade fechada $\psi(B)$ contida em A. Como A é um espaço decomponível será:

$$(14) \qquad A = R \oplus \psi(B)$$

onde

$$(15) \qquad R = A \ominus \psi(B)$$

é a variedade fechada complementar de $\psi(B)$.

Notemos que

$$(16) \qquad \Phi(A) \subset \psi(B) \subset A$$

E que

$$(17) \qquad \Phi(A) = \Phi(R) + \Phi[\psi(B)]$$

visto que Φ é um topo-isomorfismo, $\Phi(R)$ está em relação de soma directa com R , visto que

$$\Phi(R) \subset (B)$$

De (16) resulta que :

$$(18) \qquad \Phi^{(2)}(A) \subset \Phi[\psi(B)] \subset \Phi(A)$$

e de um modo geral que

(19) $\Phi^{n}(A) \subset \Phi^{n-1}[\Psi(B)] \subset \Phi^{n-1}(A)$

De (17) resulta que

(20) $\Phi^{2}(A) = \Phi^{2}(R) \oplus \Phi^{2}[\Psi(B)]$.

e de um modo geral que:

(21) $\Phi^{n}(A) = \Phi^{n}(R) \oplus \Phi^{n}[\Psi(B)]$

De (16), (18) e (19) resulta que $\Phi^{n}(A)$ está em relação de soma directa com R visto que:

(22) $\Phi^{n}(A) \subset \Psi(B)$

e portanto o mesmo acontece com $\Phi^{n}(R)$ em virtude de (21). Podemos mesmo afirmar que $\Phi^{i}(R)$ está em relação de soma directa com $\Phi^{j}(R)$ se $i \neq j$.

Seja então

$$A^{(n)} = R \oplus \Phi(R) \oplus \Phi^{2}(R) \oplus \ldots \oplus \Phi^{n}(R)$$

$A^{(n)}$ é uma variedade fechada de A.

Representaremos por

$$A_1 = R \overset{\times}{\oplus} \Phi(R) \overset{\times}{\oplus} \Phi^{2}(R) \overset{\times}{\oplus} \ldots \overset{\times}{\oplus} \Phi^{n}(R) \overset{\times}{\oplus} \ldots$$

a mesma variedade fechada que contém $A^{(n)}$ qualquer que seja $\underline{n}$, e seja

$$S = \Phi(R) \overset{\times}{\oplus} \Phi^{2}(R) \overset{\times}{\oplus} \ldots \overset{\times}{\oplus} \Phi^{n}(R) \overset{\times}{\oplus} \ldots$$

a mesma variedade fechada que contém

$$S^{(n)} = \Phi(R) \oplus \Phi^{2}(R) \oplus \ldots \oplus \Phi^{n}(R)$$

qualquer que seja $\underline{n}$. Em virtude de (22) é evidente que

$$S^{(n)} \subset \Psi(B)$$

e portanto que

$$S \subset \Psi(B)$$

Nestas condições R e S estão em relação de soma directa.

118

Representaremos por

$$A_0 = R \dot{\oplus} \Phi(R) \dot{\oplus} \Phi^2(R) \dot{\oplus} \cdots \dot{\oplus} \Phi^n(R)$$

o conjunto dos elementos da forma

$$a = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad (\text{ n qualquer })$$

onde

$$a_0 \in R$$

$$a_i \in \Phi^i(R)$$

É claro que A_0 é um sub-grupo de A .

Representaremos por

$$S_0 = \Phi(R) \dot{\oplus} \Phi^2(R) \dot{\oplus} \cdots \dot{\oplus} \Phi^n(R) \dot{\oplus} \cdots$$

o conjunto dos elementos da forma

$$s_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (\text{ n qualquer })$$

então S_0 é um sub-grupo de $\Psi(R)$ que está portanto em relação de soma directa com R. É evidente que

$$A_0 = R \dot{+} S_0$$

Nestas condições A é a menor variedade fechada que contém A_0 e S é a menor variedade fechada que contém S_0 .

Em virtude do teorema 6 do parágrafo precedente podemos portanto afirmar que:

$$(23) \qquad A_1 = \overline{A_0} = \overline{(R \dot{+} S_0)} = \overline{R} \dot{+} \overline{S_0}$$

$$= \overline{R} \dot{+} \overline{S} = R \oplus S$$

isto é:

$$(24) \qquad A_1 = R \oplus [\Phi(R) \overset{*}{\oplus} \Phi^2(R) \overset{*}{\oplus} \cdots \overset{*}{\oplus} \Phi^n(R) \overset{*}{\oplus} \cdots]$$

Notemos agora por outro lado que

$$\Phi(A^n) = \Phi(R) \oplus \Phi^2(R) \oplus \cdots \oplus \Phi^{n+1}(R) = S^{n+1}$$

Como A_1 é a menor variedade fechada que contém $A^{(n)}$ qualquer que seja n, $\Phi(A_1)$ é a menor variedade fechada que contém $\Phi(A^n) = S^{n+1}$ qualquer que seja n e portanto

$$(25) \qquad \Phi(A_1) = S$$

119

Nestas condições podemos escrever, em virtude de (23) e (25)

(26) $$A_1 = R \oplus \Phi(A_1)$$

Seja A_2 a variedade fechada complementar de A_1, isto é:

$$A_2 = A \ominus A_1$$

ou (27) $$\boxed{A = A_1 \oplus A_2}$$

Como A_1 é uma variedade fechada de A, $\varphi(A_1)$ será uma variedade fechada de B, seja:

(28) $$\boxed{B_1 = \varphi(A_1)}$$

Seja B_2 a variedade fechada complementar de B_1, isto é:

$$B_2 = B \ominus B_1$$

ou (29) $$\boxed{B = B_1 \oplus B_2}$$

daqui se deduz

$$\psi(B) = \psi(B_1) \oplus \psi(B_2)$$

isto é:

$$\psi(B_2) = \psi(B) \ominus \psi(B_1)$$

ora de (14) deduz-se que

$$\psi(B) = A \ominus R$$

e portanto:

$$\psi(B_2) = (A \ominus R) \ominus \psi(B_1)$$

Por outro lado de (28) resulta que

$$\psi(B_1) = \psi[\varphi(A_1)] = \Phi(A_1)$$

e portanto

$$\psi(B_2) = (A \ominus R) \ominus \Phi(A_1)$$
$$= A \ominus [R \oplus \Phi(A_1)]$$

ou em virtude de (26)

$$\psi(B_2) = A \ominus A_1 = A_2$$

isto é:

(30) $$\boxed{\psi(B_2) = A_2}$$

120

As fórmulas (27), (28), (29) e (30) demonstram o teorema enunciado.

Corolário - Se dois grupos abelianos A e B perfeitamente decomponíveis têm a mesma dimensão algébrica então A e B são topo-isomorfos. É uma consequência imediata do teorema 7 do parágrafo precedente.

121

§5- Grupos abelianos

13 - Definição. Um grupo abeliano diz-se normado se existe um funcional - a que daremos o nome de norma de x e que representaremos pela notação $\|x\|$ - que satisfaz às seguintes condições:

N_0 - Se $x = y$ será $\|x\| = \|y\|$

N_1 - $\|x\| \neq 0$ se $x \neq \theta$

N_2 - $\|\theta\| = 0$

N_3 - $\|x\| = \|-x\|$

N_4 - $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Verifica-se imediatamente que G é um espaço distanciado se definirmos a distância entre dois dos seus elementos pela condição

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Além disso G é um grupo abeliano topológico.

Diz-se que G é completo se toda a sucessão convergente [isto é tal que dados $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

para

$$p, q > N(\varepsilon)]$$

tender para um limite; isto é existe $x \in G$ tal que dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ que verifica a condição

$$\|x - x_p\| < \varepsilon$$

$$p > N(\varepsilon)$$

14 - Noção de Série. A noção de grupo abeliano normado e completo é importante porque nêste espaço se pode fazer uma teoria das séries em que se demonstram muitos dos resultados elementares conhecidos na teoria das séries de números.

Seja x_n uma sucessão de elementos de G, se

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

122

tende para um limite S quando n aumenta diremos que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

é convergente e que a sua soma é S.

Para que uma série seja convergente é necessário e suficiente que dado $\delta > 0$ exista N (δ) tal que

$$\| s_m - s_n \| < \delta$$

para

$$m, n > N(\delta)$$

Uma série diz-se absolutamente convergente se a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|$$

fôr convergente. Demonstra-se então que a série dada é convergente.

Teorema. Se a série $\sum y_n$ é absolutamente convergente e se $\| x_n \| \leq c \| y_n \|$ a série $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

Teorema de Cauchy. Se $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{\| x_n \|} < 1$ a série $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

Teorema de Alembert. Se existe $\theta \geq 1$ e N tal que para $n > N$ seja $\frac{\| x_{n+1} \|}{\| x_n \|} < \theta < 1$ a série dada é absolutamente convergente.

Indicaremos êstes teoremas a título de exemplo, mas a maior parte dos teoremas sôbre séries absolutamente convergentes são ainda válidos.

15 - Espaço G^2_∞. A partir do espaço G é possivel construir outros. Consideremos por exemplo o espaço G^2_∞ das sucessões de elementos de G

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

tais que

/123

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < +\infty$$

é fácil mostrar que G_{∞}^2 é um grupo abeliano normado de acôrdo com as seguintes definições

1ª) Igualdade. $X = Y \rightleftarrows x_i = y_i$

2ª) Adição. $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$

3ª) Norma. $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2}$

Não sabemos se G_{∞}^2 é um espaço completo.

16 - Grupos normados perfeitamente decomponiveis. G é um grupo perfeitamente decomponivel quando êle fôr decomponivel e quando

$$G = G_1 \oplus G_2$$
$$x = x_1 + x_2$$

implicar que

$$\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$$

Todos os resultados do § precedente se aplicam a êstes grupos.

17 - Noção de derivada. Seja t uma variável real e x um elemento de um grupo abeliano G normado e completo, seja x (t) uma função contínua de t definida num certo intervalo (t_0, t_1), diremos que x (t) tem uma derivada x' (t) no ponto t se existir o limite

$$\lim_{h=0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

qualquer que seja a meneira como h tende para zéro.

Demonstra-se imediatamente que

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) + y(t)\right] = \frac{d}{dt} x(t) + \frac{d}{dt} y(t)$$

É também possivel definir a noção de integral de x (t).

Também se define a noção de derivada de x (z) onde z é um número completo etc.

124

§ 6 - Espaços de Banach

18 - Definição. Diz-se que (B) é um espaço de Banach se (B) fôr um espaço vectorial, onde se define uma norma que gosa das seguintes propriedades

1ª) (B) é um grupo abeliano normado

2ª) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ qualquer que seja o número α.

3ª) O espaço é completo em relação à norma.

Como caso particular podemos indicar o espaço de Hilbert.

19 - Funções analíticas. É possivel num espaço (B) fazer uma teoria das funções analíticas análoga à teoria de Weierstrass. Seja z um número complexo e a_0, a_1, ..., a_n, ... uma sucessão de elementos de (B), consideremos a série

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n a_n$$

Teorema de Abel. Se $\|z_0^n a_n\| < M$ onde M é positivo e $z_0 \neq 0$ a série é convergente para $|z| < |z_0|$.

Pode-se definir o raio de convergência da série (1) como sendo o maior número positivo r tal que a série (1) é convergente para $|z| < r$ e mostrar que

$$r = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{\|a_n\|}$$

teorema análogo ao de Cauchy - Hadamard. A aparelhagem de Cauchy é aplicavel em grande parte a estas funções.

20 - Operadores lineares. Diz-se que o operador T (x) definido em (B) e cujo contra-domínio pertence a (B), ou a outro espaço (B), é linear quando

1ª) $T(x+y) = T(x) + T(y)$

2ª) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

3ª) $T(x)$ é contínuo

125-

Na realidade pode-se suprimir a condição 2ª).

É fundamental o seguinte:

Teorema de Banach. Para que T (x) seja um operador linear é necessário e suficiente que exista um número real $K > 0$ tal que

$$\| T(x) \| \leq K \| x \|$$

Veja Banach (3), pag. 151 - 153.

Pôsto isto é facil de verificar que:

Teorema. O conjunto dos operadores lineares definidos num espaço (:B), formam um espaço vectorial normado quando se define a nórma de um operador linear T (x), como sendo o menor número positivo K que verifica a condição

$$\| T(x) \| \leq K \| x \|$$

Representaremos a norma de um operador linear T (x) pela notação $|T|$.

21 - Variedades fechadas. Diremos que um sub-conjunto A de (B) é uma variedade fechada se A fôr um espaço vectorial e se A' A. O contra-domínio de um operador linear T (x) é uma variedade fechada, e portanto T (x) representa um homomorfismo de (B) em A. Se T (x) admite um inverso, então T (x) é um isomorfismo.

Compreende-se assim a importância que tem o estudo da inversão dos operadores lineares.

A teoria dos operadores lineares definidos em (B) contém como caso particular a teoria das equações integrais de Fredholm, a teoria das matrizes infinitas etc.

126

§ 7 - Aneis vectoriais normados

22 - Definição. Um anel vectorial $\mathfrak{A}$ diz-se normado quando existe um funcional - a que daremos o nome de norma do elemento T de $\mathfrak{A}$ e que representaremos pela notação $\| T \|$ - que satisfaz às seguintes condições:

1º) $\mathfrak{A}$ é um espaço de Banach em relação à norma.

2º) $\| ST \| \leq \| S \| \, \| T \|$

Suporemos que $\mathfrak{A}$ é completo.

Esta noção também foi considerada por M. Nagumo [1] e dêste facto ~~ponto~~ tivemos apenas conhecimento ha poucos mêses. Tinhamos sido levados a considerar esta noção com o objectivo de generalizarmos os resultados obtidos sôbre a aditividade dos núcleos de Fredholm e no verão de 1936, já tinhamos obtido os resultados que vamos indicar, nos números seguintes. Mas antes disso notemos que:

Teorema. - O conjunto dos operadores lineares definidos num espaço (B) formam um anel vectorial normado.

23 - Resolvente. Suporemos que $\mathfrak{A}$ contém uma unidade E . Seja $A \in \mathfrak{A}$ daremos o nome de resolvente de A à função de parâmetro complexo λ definida por

$$R(A;\lambda) = A + \lambda A^2 + \cdots + \lambda^{n-1} A^n + \cdots$$

que é uma função holomorfa de λ , cujo contra-domínio pertence a $\mathfrak{A}$, no interior do círculo

$$|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$$

É fácil de mostrar que

$$(E + \lambda A)^{-1} = E + \lambda R(A;\lambda)$$

Diremos que A e B são elementos aditivos se

127

$$R(A+B;\lambda) = R(A;\lambda) + R(B;\lambda)$$

e para isso é necessário e suficiente que

$$(A+B)^n = A^n + B^n$$

ou ainda que (veja-se capítulo II)

$$AB + BA = 0$$
$$ABA + BAB = 0$$

Os resultados que obtivemos, A. Monteiro [2] pag. 54, sôbre a aditividade das resolventes de dois núcleos de Fredholm são ainda válidos em $\mathfrak{A}$

24 - Espaços de Banach com operadores.

Seja $\mathcal{E}$ um espaço de Banach completo, diremos que $\mathcal{E}$ admite $\mathfrak{A}$ como domínio de operadores à esquerda se a cada elemento $x \in \mathcal{E}$ e $A \in \mathfrak{A}$ corresponde um elemento y de $\mathcal{E}$

$$y = A(x) = Ax$$

tal que:

1º) $A(x+y) = A(x) + A(y)$

2º) $A(\alpha x) = \alpha\,[A(x)] = \alpha\, A(x)$

3º) $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$

4º) $AB(x) = A\,[B(x)]$

5º) $E(x) = x$

6º) $\| A(x) \| \leq \| A \| \cdot \| x \|$

Consideremos então as duas equações

$$E(x_1) - \lambda\, A(x_1) = E(y)$$
$$E(x_2) - \lambda\, A(x_2) = E(y)$$

ou (1) $(E - \lambda A)\, x_1 = y$

(2) $(E - \lambda B)\, x_2 = y$

e a equação

(3) $[E - \lambda(A+B)]\, x = y$

128

Estas três equações admitem soluções para valores de λ situados no interior do menor dos três círculos

$$|\lambda| \leq \frac{1}{|A|}, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{|B|}, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{|A+B|}$$

Para que as soluções

(1') $x_1 = [E + \lambda R(A;\lambda)]\,y$

(2') $x_2 = [E + \lambda R(A;\lambda)]\,y$

(3') $x = [E + \lambda R(A+B;\lambda)]\,y$

Verifiquem a condição:

$$x - y = (x_1 - y) + (x_2 - y)$$

é necessário e suficiente que A e B sejam aditivos.

129

§ 8 - Análise dos conjuntos abstractos

25 - Seja E um conhjunto abstracto qualquer, e $\mathcal{E}$ o conjunto dos sub-conjuntos de E.

Já mostrámos que é possivel definir em $\mathcal{E}$ uma álgebra $\mathcal{A}$ e uma topologia $\mathcal{T}$ e portanto $\mathcal{E}$ é um espaço algébrico-topológico.

Vamos agora mostrar que $\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{T})$ é um espaço analítico.

Sob o ponto de vista algébrico $\mathcal{E}$ é um anel especial e sob o ponto de vista topológico $\mathcal{E}$ é um espaço L .

Seria fácil de verificar que dadas duas sucessões de conjuntos

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$$

se tem:

1º) $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} (A_n + B_n) = \overline{\lim\limits_{n=\infty}} A_n + \overline{\lim\limits_{n=\infty}} B_n$

2º) $\underline{\lim\limits_{n=\infty}} (A_n + B_n) \supset \underline{\lim\limits_{n=\infty}} A_n + \underline{\lim\limits_{n=\infty}} B_n$

3º) $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} (A_n \wedge B_n) \subset (\overline{\lim\limits_{n=\infty}} A_n) \wedge (\overline{\lim\limits_{n=\infty}} B_n)$

4º) $\underline{\lim\limits_{n=\infty}} (A_n \wedge B_n) = (\underline{\lim\limits_{n=\infty}} A_n) \wedge (\underline{\lim\limits_{n=\infty}} A_n)$

5º) $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} (A_n - B_n) \subset \overline{\lim\limits_{n=\infty}} A_n - \underline{\lim\limits_{n=\infty}} B_n$

6º) $\underline{\lim\limits_{n=\infty}} (A_n - B_n) \supset \underline{\lim\limits_{n=\infty}} A_n - \overline{\lim\limits_{n=\infty}} B_n$

Nestas condições se existirem

$$\lim_{n=\infty} A_n$$

$$\lim_{n=\infty} B_n$$

será

$$\lim_{n=\infty} (A_n + B_n) = \lim_{n=\infty} A_n + \lim_{n=\infty} B_n$$

$$\lim_{n=\infty} (A_n - B_n) = \lim_{n=\infty} A_n - \lim_{n=\infty} B_n$$

$$\lim_{n=\infty} (A_n \wedge B_n) = (\lim_{n=\infty} A_n) \wedge (\lim_{n=\infty} B_n)$$

130

portanto

$$F(A, B) = A + B$$
$$G(A, B) = A - B$$
$$H(A, B) = A \wedge B$$

são três funções contínuas de A e B e portanto $\mathcal{E}$ é um espaço analítico. Fica assim mais ũma vez posta em evidência a importância da noção de limite de uma sucessão de conjuntos.

26 - <u>Equivalência e topo-isomorfismos</u>

Como $\mathcal{E}$ é um espaço algébrico-topológico, é possível definir um topo-isomorfismo entre dois espaços $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ associados a E e E', e dimensão algébrica de um espaço $\mathcal{E}$.

Se E e E' são equivalentes $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ também o são e é curioso notar que a equivalência que então existe entre $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ é um topo-isomorfismo; portanto se E e E' são equivalentes $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ têm a mesma dimensão algébrica.

Acabamos portanto de mostrar que na teoria dos conjuntos abstractos existe uma análise, que é indispensável considerar no estudo dessa teória.